1.

MATAPI

אמנון פז

I מספרים ממשיים.

1.1 קבוצות מספרים הצגה על הישר, קטעים, קבוצות דיסקרטיות, הבלה (טלי וכו')

1.2 אי שוויונות: (1) טרנסיטיביות, (2) חבור מספר חיובי (3) כפל במספר חיובי

(4) $0<a<b \Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$. הערה על $\geq$!

1.3 הערך המוחלט

$$|a| = \begin{cases} a & a\geq 0 \\ -a & a<0 \end{cases}$$

תכונות $a=0 \Leftrightarrow |a|=0$, $|a|=|-a|$, $|a\cdot b| = |a|\cdot|b|$, $|a|^2 = a^2$

אי שוויון המשולש:

ברור כי $|a| \geq \pm a$ $|b| \geq \pm b$ ולכן $|a|+|b| \geq \pm(a+b)$ אך

$|a+b| = \begin{cases} a+b, & a+b\geq 0 \\ -(a+b) & a+b<0 \end{cases}$ ולכן $|a+b| \leq |a|+|b|$

כמו כן

$$||a|-|b|| \leq |a-b|$$

הוכחה!

$$|a| = |a-b+b| \leq |a-b|+|b|$$

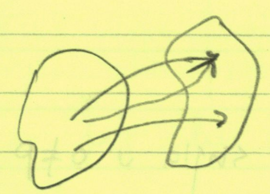
ולהפך

II. פונקציות

2.1 מושג הפונקציה (חד ערכיות), תחום הגדרה וטווח.

קופסא שחורה

2.2 הצגת פונקציה ממשית במישור - חד ערכיות



2.3 פונקציה כהעתקה.

2.4 הרכבה של פונקציות $f\circ g(x) = f(g(x))$

(דרישות להרכבה $R(f) \subset D(g)$.

2.5 פונקציה חד חד ערכית.

2.6 הפונקציה ההפוכה $f\circ f^{-1} = i$

הסבר ע"י הזוג $f:\{(x,y)\}$ $f^{-1}:\{(y,x)\}$

דרישת החד חד ערכיות ברורה מכאן

דוגמאות:

1. $f(x)=3x$ $\quad g(x)=3x^2-1$

$$f\circ g(x) = 3(3x^2-1) = 9x^2-3 \;;\; g\circ f(x) = 3(3x)^2-1 = 27x^2-1$$

ומכאן ברור $f\circ g \neq g\circ f$

2. $f(x)=2x$ $\quad g(x)=\sqrt{x-1}$ $\quad D(f)=\mathbb{R}$ $\quad D(g):\{x\ge 1\}$

תחום ההגדרה של $f\circ g$ הוא לכן תחום ההגדרה של g כלומר $\{x: x\ge 1\}$
וקיים: $f\circ g(x) = 2\sqrt{x-1}$
לעומת זאת תחום ההגדרה של $g\circ f$ מוגבל ע"י תחום ההגדרה של g
וקיים $g\circ f(x)=\sqrt{2x-1}$ ולכן תחום ההגדרה
של $g\circ f$ הוא $\{x: x\ge 1/2\}$ שונה מתחום ההגדרה של $f\circ g$.

3. פונקציות הפוכות: $f(x)=ax+b$ $\;a\neq 0$, הפונקציה מוגדרת על כל הישר והיא
חד חד ערכית: הפונקציה ההפוכה מעתיקה את $ax+b$ ל-x
ולכן $f^{-1}(ax+b)=x$ אז $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$

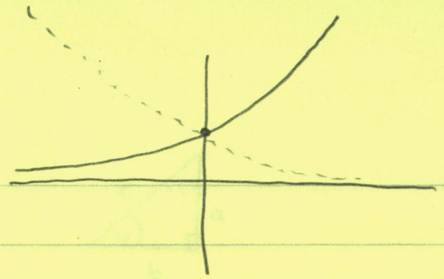
דוגמא נוספת: $f(x)=x^2$ פונקציה זו איננה חד חד ערכית ולכן
הפונקציה ההפוכה איננה מוגדרת על כל הישר. בתחום $x\ge 0$ הפונקציה
חד חד ערכית והפונקציה ההפוכה לה היא $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$.

III הפונקציות האלמנטריות

1. פולינום $p(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$
2. פונקציה רציונאלית $r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ מוגדרת במקום ש-$q\neq 0$
3. הפונקציה המעריכית

לכל $a\ge 0$ ניתן להגדיר את הפונקציה $f(x)=a^x$ אנו
מכירים פונקציה זו כאשר x מספר שלם ולא נעסוק כאן בהגדרתה
המדויקת עבור x ממשי. התכונות של a^x דומות לאלו של a^n
וקיים:

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y} \qquad a^{-x}=\frac{1}{a^x}$$
$$(a^x)^y=(a^y)^x=a^{x\cdot y}$$



עבור $a>1$ הגרף ——

ועבור $a<1$ הגרף ----

הפונקציה ההפוכה ל a^x $(a>1)$ בעלת תחום הגדרה $x>0$ והיא מסומנת $f(x)=\log_a x$

מן ההגדרה נובע שאם $\log_a x = y$ אז $a^y = x$ ומכאן

אם: $(i=1,2)$ $\log_a x_i = y_i$ אז $a^{y_i} = x_i$ ולכן $x_1\cdot x_2 = a^{y_1+y_2}$ ומכאן

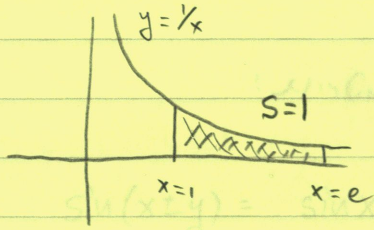
$$\log_a x_1\cdot x_2 = y_1+y_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

ובפרט גם כאשר α איננו שלם קיים: $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$

כי אם $\log_a x = y$ אז $a^y = x$ ולכן $a^{\alpha y} = x^\alpha$ ומכאן $\alpha \log_a x = \alpha y = \log_a x^\alpha$.

אנו מרבים להשתמש בבסיס מיוחד e $e = 2.71828..$, הסיבה לכך תתברר בהמשך ואנו מסמנים $\log_e x$ ב $\ln x$.

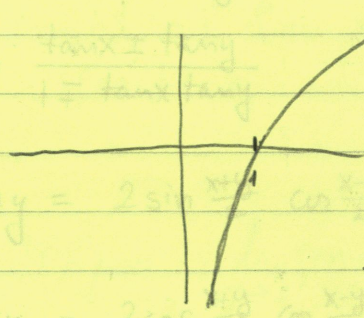
את המספר e ניתן לתאר ע"י:



מההגדרה ברור ש $\ln e = 1$

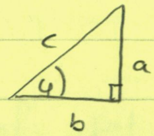
(לכל בסיס) $\ln 1 = 0$

וכמובן הפונקציה ההפוכה של $\ln x$ היא e^x הגרף של $\ln$ ניתן ע"י



וכמובן $\ln x$ כמו כל שאר ה $\log_a x$ מוגדרות רק עבור $x>0$.

4.



הפונקציות הטריגונומטריות.

בביה"ס הוגדרו הפונקציות של זווית ע"י

$\sin\varphi = \frac{a}{c}$ $\quad \cos\varphi = \frac{b}{c}$ $\quad \tan\varphi = \frac{a}{b}$

$\cot\varphi = \frac{b}{a}$.

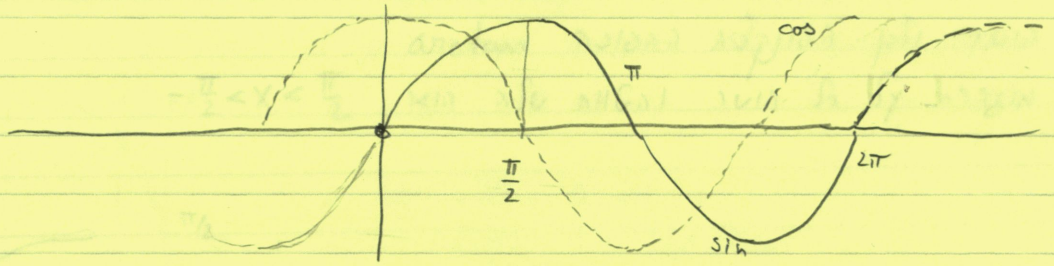
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

אנו משתמשים בהגדרה שונה של זוית והיא הזוית רדיאן 1 שווה

$\frac{\pi}{180}$ ואז נקבל $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ $\quad 180^\circ = \pi$ $\quad 360^\circ = 2\pi$

אנו מרחיבים עתה את ההגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות sin ו cos

לכל הישר ע"י מחזוריות $\sin(x+2n\pi) = \sin x$ $\quad \cos(x+2n\pi) = \cos x$



מן ההגדרות ברור $\sin 0 = 0$ $\quad \sin\frac{\pi}{2} = 1$ $\quad \sin\pi = 0$ $\quad \sin\frac{3\pi}{2} = -1$ $\quad \sin 2\pi = 0$

$\cos 0 = 1$ $\quad \cos\frac{\pi}{2} = 0$ $\quad \cos\pi = -1$ $\quad \cos\frac{3\pi}{2} = 0$ $\quad \cos 2\pi = 1$

וכן: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

ו $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $\quad \cos(-x) = \cos x$ $\quad \sin(-x) = -\sin x$

נזכיר מספר זהויות ידועות של פונקציות טריגונומטריות:

(1) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ $\qquad \sin 2x = 2\sin x \cos x$

(2) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ $\qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(3) $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

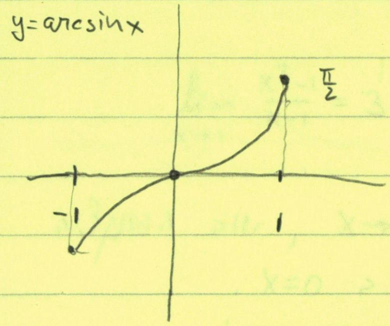
(4) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(5) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

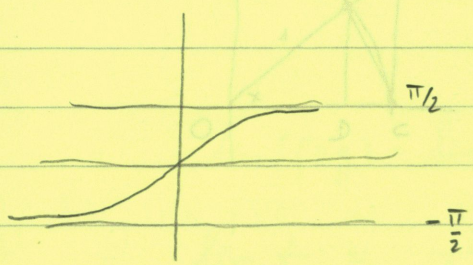
הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות.

sinx היא חד חד ערכית בין $-\frac{\pi}{2}$ ל $\frac{\pi}{2}$ ולכן ניתן להגדיר לה שם
פונקציה הפוכה המסומנת ב arcsin או ב $\sin^{-1}$ וקיים:



$$\arcsin(\sin x) = x$$

כנ"ל מגדירים arccosx.
הפונקציה tanx מוגדרת בקטע $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$
היא חד חד ערכית והטווח שלה הוא $\mathbb{R}$
הישר ולכן הפונקציה ההפוכה arctan
מוגדרת על כל הישר והטווח שלה הוא $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$



(השלמת תחומים במישור!)
קו ישר מעגל

מושג הגבול של פונקציה

אנו מסמנים $\lim_{x\to a} f(x) = L$
אם כאשר x קרוב לערך a וא f(x) קרוב למספר L (f לאו דווקא מוגדרת בנקודה x=a)

במדויק אף כי לא נרבה להשתמש בהגדרה המדויקת קיים:
הגדרה: L הוא הגבול של f כאשר x שואף ל a (x→a) אם לכל $\varepsilon>0$
קיים $\delta>0$ כך שלכל $|x-a|<\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.

דוגמאות:

1. $f(x)=x^2$, $x\to 2$ כאשר $\lim_{x\to 2} f(x)=4$ ואמנם:

$$|x^2-4| = |(x-2)||x+2| \le 5|x-2|$$

ולכן כאשר x קרוב ל 2 x^2 קרוב ל 4

2. נתבונן בפונקציה $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$ פונקציה זו איננה מוגדרת ב $x=1$
אך יש לה גבול כאשר $x\to 1$ ואמנם

$$(x^3-1)=(x-1)(x^2+x+1)$$

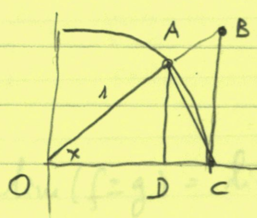
ולכן

$$\frac{x^3-1}{x-1}=1+x+x^2$$

וכאשר $x\to 1$ הביטוי שואף ל 3 לומר

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$$

3. נתבונן עתה בפונקציה $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ כאשר $x\to 0$, שוב הפונקציה
איננה מוגדרת ב $x=0$ אך כפי שנראה יש לה גבול ב $x=0$.
לשם כך נצייר מעגל ברדיוס 1



$$\frac{\tan x}{2}=\frac{BC}{2}=\Delta\ OCB$$

$\frac{x}{2}=$ שטח הגזרה

$$\frac{\sin x}{2}=\frac{AD}{2}=\Delta\ OAC$$

וקיים כפי שנוכחנו

$$\frac{\tan x}{2}>\frac{x}{2}>\frac{\sin x}{2}\quad\overset{(x>0)}{\Longrightarrow}\quad\frac{1}{\cos x}>\frac{x}{\sin x}>1$$

או

$$\frac{1}{\cos x}\le\frac{\sin x}{x}\le 1$$

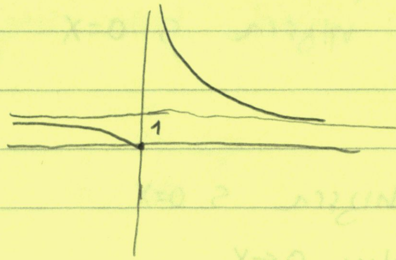
כאשר $x\to 0$ ו $\cos x\to 1$ ולכן $\frac{\sin x}{x}\to 1$ כאשר $x\to 0$.

הגדרה: נאמר ש $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ אם כאשר x קרוב ל a ערך הפונקציה גדול כרצוננו. ביתר דיוק

הגדרה: נאמר ש $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ אם לכל $M>0$ קיים δ כך שאם $|x-a|<\delta$ $f(x)\ge M$.

4. נתבונן בפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ $x>0$ ונראה מיד ש $\lim_{x\searrow 0}f(x)=\infty$

5. נתבונן בפונקציה $y=\frac{x}{|x|}$ מה קורה לה כאשר $x\to 0$,
נגדיר: $f(0)=0$ אך כאשר $x>0$ הפונקציה קבועה ושווה ל 1
וכאשר $x<0$ הפונקציה קבועה ושווה ל 1-. לכן יש לה גבול מימין
וגבול משמאל, הם שונים זה מזה ושונים מערך הפונקציה בנקודה.



6. נתבונן בפונקציה $y=2^{\frac{1}{x}}$ ע"י $x\to 0$
כאשר $x>0$ ושואף ל0 $2^{1/x}$ שואף ל∞
כאשר $x<0$ ורחוק מאפס $2^{1/x}$ ערך הפונקציה
קרוב ל1 וכאשר $x\to 0$ והוא שלילי הפונקציה
שואפת ל0.

משפטי הגבול

לגבול של פונקציה בנקודה יש התכונות הבאות:

$$\lim(f\pm g)=\lim f\pm\lim g \qquad \lim f\cdot g=\lim f\cdot\lim g$$

$$\lim\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim f(x)} \qquad \lim f\neq 0 \;*$$

דוגמאות: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+1}{3x^2+6}=\frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2} \qquad \cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot 5=5$$

גבולות כאשר $x\to\pm$

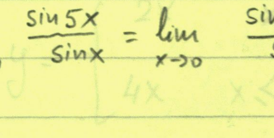
הגדרה בדומה לקודם.

דוגמאות:

$\frac{1}{x}\to 0$ $x\to\infty$ $x^2\to\infty$ כאשר $x\to\infty$ $\nexists\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$

גבולות חד צדדיים

נתבונן בפונקציה $y=\operatorname{sign}x=\frac{x}{|x|}$



לפונקציה זו אין גבול כאשר $x\to 0$

אך יש לה גבול כאשר $x \searrow 0$ וכאשר $x \nearrow 0$ אך גבולות אלו אינם שווים.

<u>תרגיל</u>: הראה מן ההגדרה שכאשר יש ל f גבול מימין וגבול משמאל והגבולות שווים יש לה גבול בנקודה השווה לשני הגבולות.

<u>דוגמאות</u> נוספות: ל $y=\sin\frac{1}{x}$ אין גבול בנקודה $x=0$

הפונקציה $y=x\sin\frac{1}{x}$ איננה מוגדרת ב $x=0$

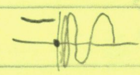
אך יש לה גבול בנקודה זו השווה ל 0.

הפונקציה $y=\frac{\sin x}{x}$ איננה מוגדרת ב $x=0$

אך ראינו שיש לה גבול בנקודה זו: כאשר $x\to 0$

דוגמא נוספת

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x} & x>0\\ 0 & x=0\\ 1 & x<0\end{cases}$$



<u>פונקציות רציפות.</u>

<u>הגדרה</u>: f רציפה בנקודה x_0 של תחום הגדרתה אם (1) קיים הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ ו (2) $L=f(x_0)$.

<u>דוגמאות</u>: $y=x^2+1$ $\quad y=\frac{x^2-1}{x-1}$ (הגדרה ב $x=1$) $\quad y=\sqrt{x}$

$y=\sin\frac{1}{x}$ ב $x=0$, $y=|x|$.

הגדרת פונקציות בחלקים:

$$y=\begin{cases}2x & x>0\\ 4x & x\le 0\end{cases}$$

פונקציה זו רציפה ב $x=0$

$$y=\begin{cases}2x+1 & x>0\\ 4x & x\le 0\end{cases}$$

הפונקציה איננה רציפה ב $x=0$

משפטים לפונקציות רציפות.

מתכונות הגבול נובע מידית המשפט הבא:

<u>משפט</u>: אם f ו-g רציפות ב-I אזי $f\pm g$ ו-$f\cdot g$ רציפות ואם גם $g\neq 0$ בתחום f/g רציפה.

<u>משפט</u>: הרכב של פונקציות רציפות הוא פונקציה רציפה. (כאשר מתקיימים תנאים מתאימים על תחום ההגדרה והטווח).

<u>דוגמא</u>: נניח שאנו רוצים לחשב את הגבול $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x}}$

מכיון שהפונקציה המעריכית רציפה יתקיים:

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e$$

או באופן כללי:

אם g פונקציה רציפה: $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f(x) = g\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)$

תכונות של פונקציות רציפות

(1) פונקציה רציפה בקטע סגור חסומה בו (הסגירות הכרחית)

(2) לפונקציה " " יש מכסימום ומינימום (הגדר מושגים)

(3) פונקציה רציפה בקטע מקבלת את כל הערכים בין שני ערכים נתונים שלה.

<u>"הוכחה"</u> נניח ש- $f(a)\cdot f(b)<0$ ונראה שיש x בקטע כך ש- $f(x)=0$.

נבצע חלוקת קטעים כך שתמיד מטפלה העיכים בקצוות קטנה מ-0 וכו'.

<u>משפט</u> הפונקציה ההפוכה של פונקציה רציפה היא פונקציה רציפה.

<u>דוגמא</u>: $y=x^2$ $x\geq 0$ רציפה ולכן גם $y=\sqrt{x}$ רציפה

מן הטענות והמשפטים הקודמים נובע:

(1) הפולינומים הם פונקציות רציפות. הפונקציות הרציונאליות רציפות בתחום הגדרתן.

(2) הפונקציות הטריגונומטריות רציפות

ראינו $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ כי $0\leq\frac{\sin x}{x}\leq 1$ עבור x קטנים, לכן

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ כי $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$

ועתה: $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h \xrightarrow[h\to 0]{} \sin x$

ולכן $\sin$ רציפה על הישר, מכאן $\cos$ רציפה על הישר ו $\tan x$ רציפה בקטע $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

<u>אסימפטוטות</u>: הישר $y=ax+b$ יקרא אסימפטוטי לפונקציה f ב ∞ אם:

$$\lim_{x\to\infty} |f(x)-ax-b| = 0$$

ישר מקביל לציר ה y ב $x=x_0$ יקרא אסימפטוטי ל f אם

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$$

נניח $y=ax+b$ אסימפטוטית ל f ב ∞ אז:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = a \quad \text{ו} \quad \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax) = b$$

<u>דוגמא</u>: $y=\frac{2x^3-1}{x^2-1}$ לפונקציה זו אסימפטוטה ב $x=1$ שכן $\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$

נראה שיש לה אסימפטוטה ב ∞. ואמנם $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-1}{x(x^2-1)} = 2$

וכן $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3-1}{x^2-1} - 2x\right) = 0$

ולכן הקו $y=2x$ אסימפטוטי לפונקציה זו ב ∞.

(להשלים משפטים על פונקציות רציפות בקטע!)

הנגזרת

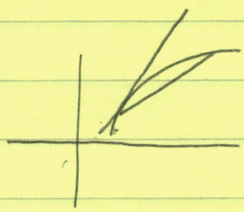
בהנתן פונקציה $y=f(x)$ מגדירים את הנגזרת שלה ע"י

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

- הנגזרת כמהירות.

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$$

- הנגזרת כשיפוע המשיק.



משוואת המשיק לקו $f(x)$ בנקודה (y_0,x_0) $y_0=f(x_0)$ היא:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0=f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0$$

טענה: פונקציה גזירה היא רציפה

$$\lim_{h\to 0}|f(x+h)-f(x)|=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h=f'(x)\cdot 0=0$$

הערה: לא כל פונקציה רציפה היא גזירה $y=|x|$ ב $x=0$

קיימת פונקציה רציפה בקטע שאינה גזירה באף אחת מנקודותיו.

כללי הגזירה

מניחים שהפונקציות f ו- g גזירות בקטע אז:

(1) $(f\pm g)'=f'\pm g'$ (2) $(f\cdot g)'=f'g+fg'$

(3) אם $g\neq 0$ בקטע $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$

נוכיח את (2)

$$(f\cdot g)'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}=f'g+fg'.$$

משפט (כלל השרשרת)

$$(g\circ f(x))'=g'(f(x))\cdot f'(x)$$

כדי להשתכנע שזה המצב נתבונן ב

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = g'(f(x))\,f'(x)$$

בסימון של לייבניץ: $z=g(y)$ ו $y=f(x)$ אזי $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$

<u>הנגזרת של הפונקציה ההפוכה</u>

קיים

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)' = \frac{1}{f'(x)}$$

נגיע לשוויון זה ע"י גזירה של שני אגפי:

$$x = f^{-1}(f(x))$$
$$1 = \left(f^{-1}(f(x))\right)' f'(x)$$

ומכאן המסקנה.

בסימון של לייבניץ $y=f(x)$, $x=f^{-1}(y)$ אזי $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

<u>דוגמאות</u>

(1) $y=c$ (4) $y=1/x$

(2) $y=x$ (5) $y=x^n$ $y'=nx^{n-1}$ לכל n שלם.

(3) $y=x^2$ (6) להלן נראה גם $y=x^\alpha$ $y'=\alpha x^{\alpha-1}$ לכל α ממשי.

<u>טענה!</u> בשלב מאוחר יותר נראה שקיים $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ $\left(\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e\right)$

(7) $y=\ln x$ $y'=\frac{1}{x}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h} = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$$

<u>מן הטענה נובע:</u> ע"י הצבה $\alpha=\ln(1+h)$ $h=e^\alpha-1$

$$\frac{1}{h}\ln(1+h)\xrightarrow[h\to 0]{}1 \Rightarrow \frac{\alpha}{e^\alpha-1}\xrightarrow[\alpha\to 0]{}1 \Rightarrow \lim_{\alpha\to 0}\frac{e^\alpha-1}{\alpha}=1$$

סימונים $\sigma, \mathcal{O}$

השלמות: $\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}=e \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ קרוב ליניארי *

(8) $(e^x)'=e^x$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}= e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x$$

(9) $y=a^x \quad y'=a^x\ln a$

$$a^x=e^{x\ln a} \Rightarrow (a^x)'=e^{x\ln a}\cdot \ln a = a^x\cdot\ln a$$

(10) נעבור עתה לחשוב הנגזרות של הפונקציות הטריגונומטריות.

$(\sin x)'=\cos x$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}=\cos x$$

(11) $(\cos x)'=-\sin x$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}=-\sin x$$

(12) $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

(13) נציג את הנגזרת של פונקציה הפוכה כדלקמן: $y=x^2 \quad x=\sqrt{y}$

$$\frac{dy}{dx}=2x \qquad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{2x} \qquad \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$$

(14) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $y=\sin x \quad x=\arcsin y$

$$(\arcsin y)'=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

(15) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$ $\quad y=\tan x \quad x=\arctan y$

$$(\arctan y)'=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}=\frac{1}{1+y^2}$$

דוגמאות נוספות:

$y=e^{\sin x} \qquad y'=e^{\sin x}\cdot\cos x$

$y=(x^2+1)^{50} \qquad y'=100x(x^2+1)^{49}$.

$y=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) \qquad y'=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$;

$y=a^{a^x} \qquad y'=a^{a^x}\cdot a^x\cdot(\ln a)^2$

הנגזרת של פונקציה סתומה.

גוזרים כל אחד מאברי השוויות

דוגמאות:

$$x^2+y^2=r^2$$

(א) $y=\sqrt{r^2-x^2}$ $\qquad y'=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}=-\frac{x}{y}$

או $\qquad 2x+2yy'=0 \qquad y'=-\frac{x}{y}$

(ב) $xy+\ln xy=1$

$$y+xy'+\frac{1}{xy}(y+xy')=0 \Rightarrow y'\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(y+\frac{1}{x}\right)=0$$

$$y'=-\frac{1}{x}\,\frac{xy+1}{xy+1}\,y=-\frac{y}{x}$$

נגזרות מסדר גבוה

אם פונקציה גזירה יותר מפעם אחת ניתן לגזור את הנגזרת וכו'

מסמנים $y,\ y',\ y'',\ y''',\ y^{(4)},\ \dots,\ y^{(n)}$

$$y \quad \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \dots\ \frac{d^ny}{dx^n}$$

דוגמא: $y=x^n$ $\qquad y'=nx^{n-1},\ y''=n(n-1)x^{n-2},\dots\ y^{(n)}=n!\ \ y^{(n+1)}=0$

דוגמא: $y=\sin x$ $\qquad y'=\cos x\ \ y''=-\sin x\ \ y'''=-\cos x\ \ y^{(IV)}=\sin x$

כלל לופיטל

בהינתן ביטוי שגבולו הוא $\frac{0}{0}$ או $\frac{\infty}{\infty}$ (או $0\cdot\infty$ שניתן להביאו ל $\frac{0}{0}$) מותר לגזור את המונה והמכנה ולעבור לגבול אחרי הגזירה.

דוגמאות:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{x}}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

נתבונן ב $(1+x)^{1/x}$ אזי $\frac{1}{x}\ln(1+x) \to \frac{0}{0}$ ולכן

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1$$

כיון שהאקספוננט רציף קיים:

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e$$

ולכן

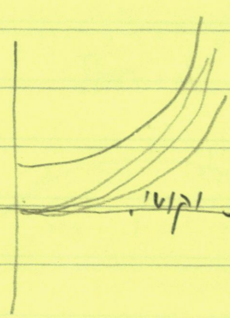
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$ כפי שציינו בעבר.

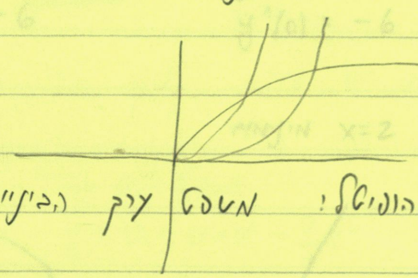
$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^{x}} = \dots \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)x^{\alpha-n}}{e^{x}} = 0$$

מסקנה: e^{x} שואף לאינסוף מהר יותר מכל חזקה של X

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x} = 0$$

מסקנה: $\ln x$ שואף לאינסוף לאט יותר מכל חזקה של x.





הערה: יש להוסיף: משפט ערך הביניים! של לגרנז' וקושי. ⇐ השלמה

חקירת פונקציה

טענות:

(1) כאשר $f'>0$ הפונקציה עולה $(f(x+h)-f(x)\approx f'(x)\cdot h)$

(2) " $f'<0$ " יורדת.

(3) אם $f'=0$ בקטע f קבועה בקטע.

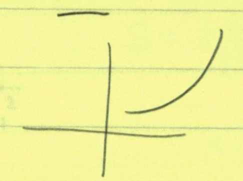
(4) מקסימה ומינימה לוקאליים כאשר $f'(x_0)=0$

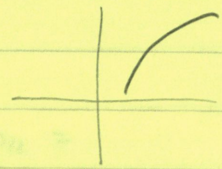
מקסימום כאשר $f''(x_0)<0$ מינימום כאשר $f''(x_0)>0$

אחרת לא מוכרע.

נקודות סטציונאריות

דוגמאות: $y=x^4$ מינימום אך $f''(0)=0$ $y=-x^4$ מכסימום אך
$f''(0)=0$ $y=x^3$ לא מכסימום ולא מינימום, נקודת פיתול.

$f''(x)>0$ הפונקציה קמורה  $f''(x)<0$ הפונקציה קעורה



אם $f''(x_0)=0$ אך הנקודה איננה אכסטרמום אז
יש ב x_0 נקודת התפתלות. (תנאי מספיק לכך $f'''(x_0)\neq 0$)

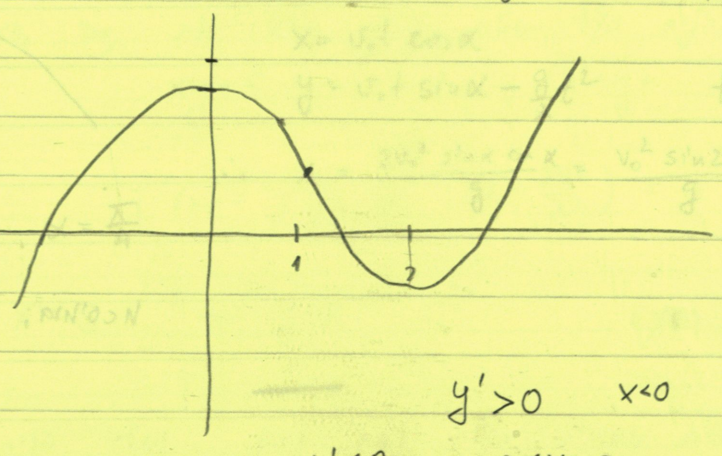
דוגמא לחקירת פונקציה

$$y=x^3-3x^2+3$$
$$y'=3x^2-6x$$
$$y''=6x-6$$
$$y'''=6$$

$y'=0$ $x=0,\quad x=2$

$y''(0)=-6$ $y''(2)=+6$

$x=0$ מכסימום $x=2$ מינימום



עבור $x<0$ $y'>0$

עבור $0<x<2$ $y'<0$

עבור $x>2$ $y'>0$

ב $x=1$ הנגזרת השניה מתאפסת והשלישית לא לכן יש התפתלות.

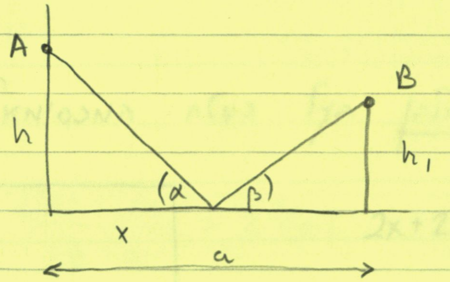
עבור $x<0$ $y''<0$ הפונקציה קעורה

עבור $x>2$ $y''>0$ הפונקציה קמורה.

17.

שימושים:

(1)



$$f(x)=\sqrt{x^2+h^2}+\sqrt{(x-a)^2+h_1^2}$$

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}+\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+h_1^2}}$$

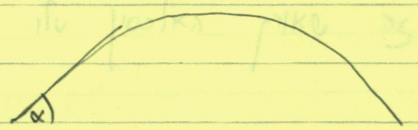
$$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+h^2}}-\frac{x^2}{(x^2+h^2)^{3/2}}+\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+h_1^2}}-\frac{(x-a)^2}{((x-a)^2+h_1^2)^{3/2}}=$$

$$=\frac{h^2}{(x^2+h^2)^{3/2}}+\frac{h_1^2}{((x-a)^2+h_1^2)^{3/2}}>0$$

$$f'(\xi)=0 \qquad \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+h^2}}=\frac{a-\xi}{\sqrt{(\xi-a)^2+h_1^2}} \qquad \cos\alpha=\cos\beta$$

---

(2) באיזה זוית יש לירות קליע כדי שיגיע למרחק המקסימלי



$$x=v_0t\cos\alpha$$

$$y=v_0t\sin\alpha-\frac{g}{2}t^2 \qquad t=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}$$

$$\therefore \quad x=\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$$

$$\frac{dx}{d\alpha}=\frac{v_0^2}{g}\cos 2\alpha \qquad \alpha=\frac{\pi}{4}$$

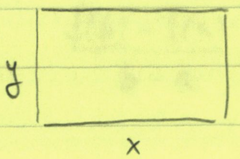
$$\frac{d^2x}{d\alpha^2}=-2\frac{v_0}{g}\sin 2\alpha$$ מקסימום,

---

17 אוי

מכסימה ומינימה תוספות.

1. נתון חבל באורך $2L$ מהו המלבן בעל השטח המכסימאלי שהחבל יכול להקיף.



$$2x+2y=2L \qquad x+y=L$$

$$S=x\cdot y = x(L-x)$$

$$S'=(L-x)-x = L-2x \qquad x=\frac{L}{2} \Rightarrow y=\frac{L}{2} \Rightarrow S=\frac{L^2}{4}$$

$$S''=-2$$

אז $S=\frac{(2L)^2}{16}=\frac{\text{ההיקף}^2}{16}$

2. בהנתן n מספרים $a_1, a_2, ..a_n$ מהו ה x עבור $\sum_{i=1}^{n}(a_i-x)^2$ הוא מינימאלי.

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-x)^2=\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2$$

$$f'(x)=2\sum_{i=1}^{n}(x-a_i) \qquad f'=0 \Rightarrow nx-\sum_{i=1}^{n}a_i=0 \qquad x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

$$f''(x)=2n>0$$

ולכן מינימום.

3. מכל המלבנים בעלי שטח קבוע מצא את זה שאורך האלכסון שלו מינימאלי

$$L=\sqrt{x^2+y^2} \qquad xy=S$$

$$L(x)=\sqrt{x^2+\frac{S^2}{x^2}} \qquad L'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+\frac{S^2}{x^2}}}\left(2x-\frac{2S^2}{x^3}\right)=0$$

$$= x^4=S^2 = \qquad x^2=S \Rightarrow y=x$$

ושוב קבלנו ריבוע.

4. מהי קופסת שמורים בעלת נפח נתון ושטח פנים מינימאלי

$$S=2\pi r^2+2\pi rh \qquad V=\pi r^2h \qquad h=\frac{V}{\pi r^2}$$

$$S=2\pi\left(r^2+\frac{V}{\pi r}\right) \qquad S'=2r-\frac{V}{\pi r^2}=0 \qquad 2\pi r^3=V \Rightarrow h=2r$$

$$r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \qquad h=2r$$

5. הוכח $e^x>\frac{1}{1+x}$ $x>0$

$f(x)=e^x(1+x)$

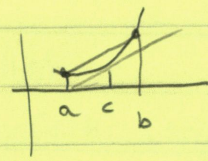
$f'(x)=e^x(1+x)+e^x>0$

מינימום כאשר $x=0$

משפט ערך הביניים.

אם f גזירה בקטע $[a,b]$ קיים c בקטע כך ש

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$



נוסחאות Taylor.

ראינו: $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$

בקרוב לינארי של f בנקודה x.

ניתן לקבל קרוב "טוב יותר" ע"י קרוב פולינומיאלי.

אם f גזירה מספיק פעמים קירוב זה ניתן ע"י

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + o(h^n)$$

את איבר השארית $o(h^n)=R_{n+1}$ ניתן להעריך באופנים רבים. הדרך המקובלת ביותר להערכה היא ההערכה של "לגרנז'" שהיא

$$\boxed{R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}}$$

דוגמאות:

$$f(x) = e^x$$
$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(0) = 1$$

(*) נבחר $x=0$, $h=x$ ונקבל

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \qquad 0<\theta<1$$

מכיון ש e^x גזירה מכל סדר ניתן להמשיך תהליך זה לכל n וקיים

$$|R_{n+1}(x)| \le e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

כאשר $n\to\infty$ השארית שואפת לאפס ואנו מקבלים את הנוסחא

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad 0! = 1$$

19.

(ב) נבחר $f(x)=\sin x$ ושוב נבחר $x=0$ ו $h=x$ ונקבל

$$f(0)=\sin 0=0$$
$$f'(0)=\cos 0=1$$
$$f''(0)=-\sin 0=0$$
$$f'''(0)=-\cos 0=-1$$

וכן הלאה ולכן:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots$$

הערכת השארית מראה שוב על התכנסות הטור.

(ד) נתבונן בפונקציה $(1+x)^\alpha$ כאשר $-1<x<1$ ו α ממשי.

עבור α טבעי נותן משפט הבינום:

$$(1+x)^n = 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\dots+\binom{n}{n}x^n \qquad \binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

נגדיר את המקדם הבינומי השבור: $\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ $\quad \alpha>0$

ועתה נתבונן בפונקציה

$$f(x)=(1+x)^\alpha$$
$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

וכו' כאשר α איננו טבעי התהליך נמשך ואנו מקבלים

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\dots$$

הערה: לא די שהפונקציה תהיה גזירה אינסוף פעמים כדי שטור טיילור יתכנס:

$$y=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

גזירה ב 0 מכל סדר וקיים $y^{(n)}(0)=0$ לכל n ולכן הטור מצטמצם לשארית!

19א

מנוסחת טיילור נובע:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + h^2 o(h)$$

ולכן אם אנו בנקודת אקסטרמום נקבל:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{h^2}{2!}f''(x) + h^2 o(h) = \frac{h^2}{2}\left(f''(x_0) + o(h)\right)$$

כאשר h קטן הסימן של הסוגריים הוא כמו הסימן של $f''(x_0)$ ו-h^2 תמיד חיובי ולכן הסימן של אגף ימין הוא כסימן $f''(x_0)$ ומכאן:

אם $f''(x_0)>0$ $\Longleftarrow$ $f(x_0+h) \ge f(x_0)$ לכל h קטן ולכן יש מינימום

אם $f''(x_0)<0$ $\Longleftarrow$ $f(x_0+h) \le f(x_0)$ " " " מכסימום.

כאשר $f''(x_0)$ מתאפסת לא ניתן להחליט.
יחד עם זאת אם גם $f'''(x_0)=0$ קיים כלל דומה לגבי הנגזרת הרביעית וכו'. אם $f'''(x_0)\neq 0$ יש נקודת התפתלות!!

<u>דוגמא נוספת</u>: $y=\ln(1+x)$

$y=\ln(1+x)$ $\quad y'=\frac{1}{1+x}$ $\quad y^{(n)}=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

$y^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

טור זה מתכנס בהחלט עבור $|x|<1$.
ניתן להראות שהוא מתכנס גם עבור $x=1$ ומקבלים

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

האינטגרל הלא מסוים.

פונקציה קדומה היא פונקציה שנגזרתה שווה לפונקציה הנתונה.

טבלא;

אנו מסמנים את הפונקציה הקדומה ל $f(x)$ ב $\int f(x)dx$

הפונקציה	הפונקציה הקדומה	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$n\neq -1$
x^{-1}	$\ln x+c$	
e^x	e^x+c	
a^x	$a^x/\ln a+c$	
$\sin x$	$-\cos x+c$	
$\cos x$	$\sin x+c$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+c$	
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x+c$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+c$ / $-\arccos x+c$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})$	

כללים: $\int(f\pm g)=\int f\pm\int g$ $\qquad \int af(x)=a\int f(x)$ נובע מכללי הגזירה

שיטות למציאת הפונקציה הקדומה.

(1) פירוק למצב ידוע:

(1) $$\int\frac{x^4}{1+x^2}dx=\int\frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx=\int\frac{1}{1+x^2}+\int(x^2-1)dx=\arctan x+\frac{x^3}{3}-x+c$$

21.

(2) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x} + \int \frac{1}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x + \tan x + C$$

(3) $$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

<u>אינטגרציה בחלקים</u>

מנוסחת הגזירה $(uv)' = u'v + uv'$ נובע:

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

<u>דוגמאות:</u>

(3) $$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

(4) $$\int x e^x dx = xe^x - \int e^x = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

(5) $$\int x^2 \cos x = x^2 \sin x - 2\int x \sin x = x^2 \sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x\right) =$$
$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$$

(6) $$\int e^x \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x$$

(7) $$\int e^x \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x$$

$$\therefore \int e^x \sin x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x$$

$$\therefore \int e^x \sin x = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

(8) $$\int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x} dx \implies \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

<u>רקורסיה</u>

(9) $$\int \cos^n x\, dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x\, dx =$$
$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \cos^n x\, dx$$

$$\therefore n\int \cos^n x\, dx = \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\, dx$$

כיון ש $\int \cos x\, dx = \sin x$, $\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$

ניתן לחשב את הפונקציה הקודמת של כל חזקה של $\cos x$

(10) <u>תרגיל:</u> כנ"ל ל $\int \sin x$

אינטגרציה בהצבה

מן הנגזרת של פונקציה מורכבת נובע אם $y = f(g(x))$

$y' = f'(g(x))\, g'(x)$

ומכאן

$$\int f(y)\,dy = \int f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

עובדה זו מצדיקה את שינוי המשתנים באופן פורמלי אם $z = f(y)$

ו $y = g(x)$ אז $\frac{dy}{dx} = g'(x)dx$ ובאופן פורמלי מציבים $dy = g'(x)\,dx$

ומקבלים:

$$\int f(y)\,dy = \int f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

דוגמאות:

(11) $\int \sin^n x \cos x \, dx$

נציב $y = \sin x$ $dy = \cos x \cdot dx$ $dx = \frac{1}{\cos x} dy$ ונקבל

$$\int \sin^n x \cos x\, dx = \int y^n dy = \frac{y^{n+1}}{n+1} + C = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C$$

(12) $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^y dy = \frac{1}{2}e^y + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$ נציב $x^2 = y$ $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2x}$

(13) $\int f(\sin x) \cos x\, dx = \int f(y)\, dy$

(14) $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ נציב $y = \cos x$ $dy = -\sin x\, dx$

$$= -\int \frac{1}{y}\, dy = -\ln|y| + c = -\ln|\cos x| + C$$

(15)

(15) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad x=a\sin t \qquad t=\arcsin\frac{x}{a} \qquad \sin t=\frac{x}{a} \qquad \cos t=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t) = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)+C$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$$

$\int \frac{dx}{\sin x} \qquad t=\tan\frac{x}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \int\frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t|+C$

ולכן

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

פונקציות רציונליות

פונקציה רציונלית היא מנה של שני פולינומים. ע"י חלוקת פולינומים ניתן להראות שהיא שווה לפולינום פלוס שארית, רציונלית $\frac{p(x)}{q(x)}$ כאשר דרגת p קטנה מדרגת q. לצורך חשוב פונקציות קדומות של פונקציה רציונלית די איפוא לעסוק בפונקציות רציונליות שדרגת המונה שלהן קטנה מדרגת המכנה.

פולינום ממשי מדרגה n ניתן לפרוק לגורמים כדלקמן

$$q(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i}\cdot\prod_{j=1}^{l}(x^2+b_jx+c_j)^{\gamma_j} \qquad n=\sum_1^k\alpha_i+2\sum_1^l\gamma_j$$

באלגברה מוכח המשפט הבא: אם $p(x)$ ו $q(x)$ פולינומים ממשיים ודרגת p קטנה מדרגת q ניתן להציג את המנה p/q ע"י

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{k=1}^{\alpha_i}\frac{A_{ik}}{(x-a_i)^k} + \sum_{j=1}^{l}\sum_{m=1}^{\gamma_j}\frac{B_{jl}x+C_{jl}}{(x^2+b_jx+c_j)^m}$$

ולכן כדי לחשב את הפונקציה הקדומה של פונקציה רציונלית.

24

אנו צריכים לדעת לחשב את הפונקציות הקדומות של ביטויים מן הסוג:

$$\frac{1}{(x-a)^k} \qquad \frac{1}{(x^2+bx+c)^k} \quad , \quad \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+bx+c)^k}$$

נחשב עתה את הפונקציות הקדומות הללו:

(I) $$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{(x-a)^{-k+1}}{1-k} + C \qquad k \neq -1$$

$$= \ln|x-a| + C \qquad k = -1$$

(II) $$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+bx+c)^k}\, dx$$

את האינטגרל הזה מפרקים כדלקמן

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+bx+c)^k}\, dx = \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k}\, dx + \left(\beta - \frac{cb}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^k}$$

האינטגרל הראשון הוא מידי ושווה ל $\quad k \neq 1 \quad -\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x^2+bx+c)^{k-1}}$

$\quad k=1 \quad \ln|x^2+bx+c|$

לכן נותר לטפל רק באינטגרלים מן הסוג: III

III $$\int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}$$

כאן כותבים $$x^2+\alpha x+\beta = x^2 + 2\frac{\alpha}{2}x + \frac{\alpha^2}{4} + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)$$

$$= \left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)$$

ע"י שינוי משתנה נביא את האינטגרל לצורה

$$\int \frac{dv}{(v^2+1)^{\ell}}$$

ואת הפונקציה הקודמת שלו נחשב בעזרת רקורסיה. נסמן

$$I_\ell = \int \frac{dv}{(v^2+1)^\ell}$$

ונקבל (בחלקים)

$$I_\ell = \int 1\cdot\frac{dv}{(v^2+1)^\ell} = \frac{v}{(v^2+1)^\ell} + 2\ell\int\frac{v^2}{(v^2+1)^{\ell+1}} =$$

$$= \frac{v}{(v^2+1)^\ell} + 2\ell\left[\int\frac{v^2+1}{(v^2+1)^{\ell+1}} - \int\frac{dv}{(v^2+1)^{\ell+1}}\right] = \frac{v}{(v^2+1)^\ell} + 2\ell I_\ell - 2\ell I_{\ell+1}$$

ולכן

$$I_{\ell+1} = \frac{v}{2\ell(v^2+1)^\ell} + \frac{2\ell-1}{2\ell} I_\ell$$

כאשר

$$I_1 = \int\frac{dv}{1+v^2} = \arctan v + C$$

דוגמאות פשוטות.

(1) $\int\frac{dx}{x^2-1} = \int\frac{dx}{(x-1)(x+1)}$

$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{x+1}$ ע"י כפל שני האגפים ב x^2-1 נקבל:

$1 = a(x+1) + b(x-1) = (a+b)x + a-b \Rightarrow a-b=1 \quad a+b=0 \quad a=\frac{1}{2} \quad b=-\frac{1}{2}$

$\therefore \int\frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$

(2) $\int\frac{dx}{x^2(x-1)}$ $\qquad \frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$

$\Rightarrow 1 = Ax^2 + Bx(x-1) + C(x-1) = (A+B)x^2 - x(C-B) - C$

$\therefore C=-1 \quad B=-1 \quad A=1$

$\therefore \int\frac{dx}{x^2(x-1)} = \ln|x-1| - \ln|x| + \frac{1}{x} + C$

(3) $\int\frac{dx}{x^2+2x+5} = \int\frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{(\frac{x+1}{2})^2+1} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$

(K)25

$$\int \frac{x}{x^3-1}\,dx \qquad x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

לכן

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

החשוב הרגיל מראה ש

ולכן $A=1/3 \quad B=-1/3 \quad C=1/3$

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+x+1}\right)$$

$$\int\frac{x\,dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$\int\frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}\,dx$$

$$\therefore \quad \int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \ln(x^2+x+1)+C$$

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1} = \int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

נציב $t=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ $\quad \frac{dt}{dx}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

ונקבל

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan t + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

וע"י סדור נקבל את הבטוי הסופי.

פונקציות רציונליות ב $(\cos x, \sin x)$

במקרה זה ניתן במקרים רבים לבצע הצבות שונות.

ההצבה $t = \tan\frac{x}{2}$ מעבירה את

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

כי) $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}$ $\qquad \sin^2\frac{x}{2} = \frac{t^2}{1+t^2}$

ולכן: $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\qquad \sin x = 2\cos^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$

כמו כן $\frac{dt}{dx} = \frac{1+t^2}{2}$ ולכן $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$.

דוגמא:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{2}{1+t^2}\,\frac{dt}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int\frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C$$

ולכן:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = -\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C$$

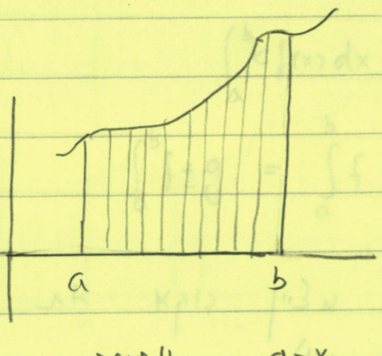
הצבות נוספות: $R(x, \sqrt{1-x^2})$ ע"י הצבה $x = \cos t$

$\sqrt{1-x^2} = \sin t$ $\qquad dx = -\sin t\,dt$ מקבלים פונקציה רציונלית

ב $\sin$, $\cos$ ועוברים לקודם.

הצבות נוספות: $t = x + \sqrt{x^2 \pm a^2}$ $\qquad \sqrt{x^2 \pm a^2}$

האינטגרל המסוים.



נתבונן בפונקציה ‎f‎ רציפה וחיובית
כדי לחשב את השטח המוגבל ע"י
הפונקציה בין ‎a‎ ל ‎b‎
נחלק את ‎(a,b)‎ ע"י ‎n‎ נקודות חלוקה ‎$a=x_0$‎ ‎$b=x_n$‎ ונחשב

$$S_n=\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu-x_{\nu-1})f(\xi_\nu) \qquad x_{\nu-1}\le\xi_\nu\le x_\nu$$

$$S_n=\sum_{\nu=1}^{n}f(\xi_\nu)\Delta x_\nu \qquad \Delta x_\nu=x_\nu-x_{\nu-1}$$

אם נגדיל את מספר הנקודות (כלומר נתן ל ‎n‎ לשאוף לאינסוף) ובמקביל
נדאג שהמרחק הגדול ביותר בין שתי נקודות ישאף לאפס נקבל
ש ‎S_n‎ שואפים לגבול ‎S‎ שאיננו תלוי בנקודות החלוקה ובנקודות הביניים
‎ξ_ν‎. את הגבול אנו מגדירים אז כאינטגרל המסויים מ ‎a‎ ל ‎b‎ של
‎f‎ וכותבים

$$\int_a^b f(x)\,dx=S$$

הנחנו פה ש ‎$a<b$‎ ו ‎$0\le f$‎. קיום הגבול לא תלוי בהנחות אלו
כי אם ‎f‎ שלילית בתחום או חלק ממנו רק הופך את הסימן של ‎$f(\xi_\nu)$‎
ולכן את סימן הסכום בתחום.. (ולא משנה את קיום הגבול) כמו כן
אם ‎$a>b$‎ כל ההפרשים ‎Δx_ν‎ הופכים שליליים.
כדי להסיר את המגבלות על ‎f‎ ועל ‎a‎ ו-‎b‎ ולקבל הגדרה כוללת
של האינטגרל המסויים עלינו לקבוע

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx \qquad a\ne b$$

וכמו כן מכאן
$$\int_a^a f(x)\,dx=0$$

ומדרך ההגדרה נובע מידית גם הנוסחא $a<b<c$

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx$$

בעזרת היחסים הקודמים רואים שהנוסחא נשארת נכונה גם
בכל סדר של ‎a,b,c‎ כמו כן

$$\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|$$

מן ההגדרה ברור גם $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

וכן

$$\int_a^b f\pm g = \int_a^b f \pm \int_a^b g$$

<u>הערה</u>! בסימון $\int_a^b f(x)dx$ הגודל x איננו מציין דוקא את ציר האיקס וק"מ כמובן $\int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt$ וכו'

<u>דוגמא</u>:

נחשב לדוגמא את האינטגרל מ a עד b של הפונקציה $y=x$

נחלק את הקטע לn קטעים חלקיים שאורכם $h=\frac{b-a}{n}$

ואז

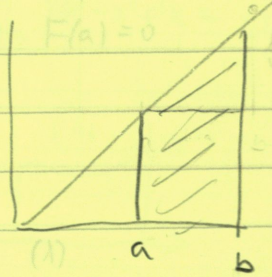
$$S_n = h\left(a+(a+h)+(a+2h)+ \ldots a+(n-1)h\right) = nah + h^2(1+2+\ldots+(n-1))$$

$$= nah + \frac{h^2 n(n-1)}{2} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

וכאשר n שואף לאינסוף נקבל

$$\lim S_n = a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2} = \cancel{ab} - a^2 + \frac{b^2}{2} - \cancel{ab} + \frac{a^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$$

שהוא אכן השטח של הטרפז המתאים

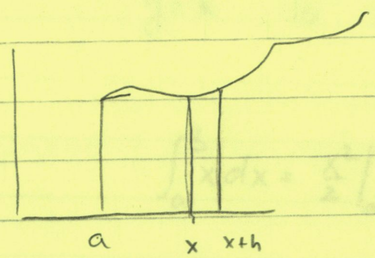


ברור שמייגע לחשב אינטגרל ע"י גבול הסכומים החלקיים כפי שעשינו בדוגמא הקודמת. ועכשיו בא לעזרתנו הקשר בין האינטגרל המסויים לנגזרת ולפונקציה הקדומה, משפט זה שהתגלה ע"י ניוטון ולייבניץ נקרא <u>המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי</u>

המשפט טוען שאם f (רציפה) קיים

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

כאשר F פונקציה קדומה של f.



המשפט מוכח כדלקמן:

נסמן את האינטגרל מ a עד x
ב $S(x)$ ואז $S(x+h)-S(x)$ הוא השטח הנוסף ע"י המעבר בין x ל $x+h$
וקיים:

$$m(\Delta) \le \frac{S(x+h)-S(x)}{h} \le M(\Delta)$$

כאשר $M(\Delta)=\max\{f(y) : x\le y\le x+h\}$ ו $m(\Delta)=\min\{f(y) : x\le y\le x+h\}$ כיון ש f רציפה
כאשר h שואף לאפס גם $M(\Delta)$ וגם $m(\Delta)$ שואפים ל $f(x)$ ואנו
מקבלים:

$$S'(x)=f(x)$$

או בסימונים שלנו $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

במילים אחרות $\int_a^x f(t)\,dt$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ או

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x)$$

כאשר F פונקציה קדומה של f. ובמקרה שלפנינו $F(a)=0$ ולכן

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x)-F(a)$$

או

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \qquad (1)$$

כיון שכל הפונקציות הקדומות של פונקציה רציפה נבדלות זו מזו
רק בקבוע (1) נכון לכל פונקציה קדומה G של f!

בעזרת המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי קל לנו לחשב
שטחים ונפחים.

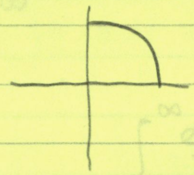
נחזור תחילה על השטח של הטרפציה בין a ל b של $y=x$

הטעם החשוב הוא כמעט מיידי.

$$\int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}$$

לשם דוגמא נחשב גם את שטח העיגול בעל רדיוס a

נחשב את השטח של 1/4 עיגול



$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\,\Big|_0^a = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}a^2$$

ולכן שטח העיגול הוא πa^2.

נדגים על אותו אינטגרל כיצד מבצעים שינוי משתנה

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

נציב $x = a\sin t$

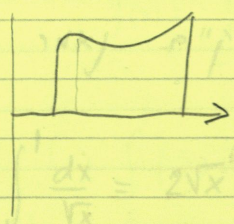
$t = \arcsin\frac{x}{a}$

ואז כאשר x עובר מ 0 עד a t עובר מ 0 עד $\frac{\pi}{2}$

ולכן

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} a^2\cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{4}\pi + 0 = \frac{a^2}{4}\pi$$

נפח של גוף סבוב



נניח שאנו מסובבים סביב ציר ה x-ים פונקציה $0 \le f(x)$

אזי מקבלים שנפח של הגוף המתקבל הוא

$$V(b,a) = \int_a^b \pi f(x)^2\,dx$$

נחשב את הנפח של כדור ברדיוס a

$y^2 = a^2 - x^2$

$$\pi\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx = \pi\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} =$$

$$\pi\left[a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3}\right] = \frac{4}{3}\pi a^3$$

אינטגרלים לא אמיתיים.

עד כה עסקנו באינטגרלים על קטע סופי של פונקציות (רציפות) חסומות
נגדיר עתה

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

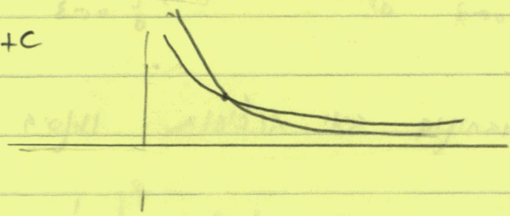
אם הגבול קיים נקרא לו האינטגרל מ a עד ∞ של $f(x)$ אם איננו קיים נאמר שהאינטגרל מתבדר.

דוגמאות:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1$$

$k>1$ $$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^k} = \lim_{b\to\infty}\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\Big|_1^b = \lim\left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{b^{k-1}}\cdot\frac{1}{1-k}\right] = \frac{1}{k-1}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx = \ln x + c$$ האינטגרל מתבדר



בדומה לכך אם f איננה חסומה בסביבת הנקודה a אך קיים הגבול

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (2)$$

אם הגבול קיים מסמנים אותו ב (2) אם איננו קיים נאמר שהאינטגרל מתבדר.

דוגמאות:

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2$$

$$\int_0^1\frac{dx}{x} = \ln x$$ האינטגרל מתבדר:

דוגמאות נוספות

$$\int_a^b\frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_a^b = \arctan b - \arctan a$$

כאשר נתן ל $b\to\infty$ נקבל $\arctan b \to \frac{\pi}{2}$

וכאשר נתן ל $a\to-\infty$ נקבל $\arctan a \to -\frac{\pi}{2}$

<u>אינטגרל לא חסום</u>

אם קיים הגבול $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{1} f(x)\,dx$

כאשר f איננה חסומה מימין לאפס

נאמר שגוזה האינטגרל מ 0 עד 1

<u>דוגמא:</u> $\int_{\varepsilon}^{1} x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_{\varepsilon}^{1} = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

כאשר $\alpha+1>0$ או $\alpha>-1$ האינטגרל מתכנס עבור $\alpha=1$ ו $\alpha<1$ אין התכנסות.

אם האינטגרציה משני הצדדים צריך לזמוג לגבול בכל צד

<u>דוגמא:</u>

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) = 0$$

אם אין אנו מבחינים באי הרציפות ומנסים לחשב

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}\Big|_0^2 = -1-1 = -2$$

ולא היא.

גם מעבר סימטרי איננו נכון למשל!

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

כשמבצעים אינטגרציה $\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{1} f(x)\,dx = 0$

ולכן הגבול כאשר $\varepsilon\to 0$ הוא אפס אך אם מגדירים מקבלים

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_{\varepsilon}^{1} = -\ln\varepsilon \to \infty$$

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx = \int_{1}^{\varepsilon} \frac{dy}{y} = \ln\varepsilon \to -\infty$$

ע׳ 31

אינטגרציה נומרית

אינטגרציה בשיטת הטרפזים

$$\frac{1}{2}(y_0+y_1)\Delta x + \frac{1}{2}(y_1+y_2)\Delta x + \dots + \frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)\Delta x$$

נחשב בשיטה זו

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1$$

נחלק את $(0, \frac{\pi}{2})$ ל 4 קטעים חלקיים: $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$

והקירוב לאינטגרל יהיו:

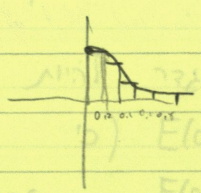
$$\frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 0{,}393(0{,}383 + 0{,}707 + 0{,}924 + 0{,}500) = 0{,}393 * 0{,}988$$

וכמובן אם לוקחים חלוקה יותר עדינה מקבלים קירוב טוב יותר.

נחשב לדוגמא:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0{,}2\left[0{,}5 + e^{-0{,}2^2} + e^{-0{,}4^2} + e^{-0{,}6^2} + e^{-0{,}8^2} + e^{-1}\cdot\frac{1}{2}\right]$$



$$\simeq 0{,}2(0{,}5 + 0{,}9608 + 0{,}8521 + 0{,}6977 + 0{,}5273 + 0{,}1839)$$

$$= 0{,}2 \times 3{,}7218 = 0{,}74437$$

הערך האמיתי הוא: 0,7468

ע״י חלוקה ל 10 חלקים נקבל: 0,7462

ע״י חלוקה ל 20 ״ ״ 0,7466

ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

הערות נוספות על אינטגרציה

בעזרת האינטגרל המסוים ניתן להגדיר את הפונקציה הלוגריתמית.
אנו מגדירים

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

מכאן ברור כמובן שנגזרת של $\ln x$ היא $1/x$.
נתבונן עתה ב $z = \ln(ax)$ אז

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

אך גם $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$ ומכיוון של z ול $\ln x$ אותה נגזרת
הן נבדלות זו מזו בקבוע כלומר

$$\ln ax = \ln x + c$$

נוסחא זו נכונה לכל $x>0$ ובהציבנו $x=1$ נקבל $c = \ln a$
ולכן

$$\ln ax = \ln x + \ln a$$

ובהציבנו עתה $x=b$ נקבל $\ln ab = \ln b + \ln a$

מכאן נובע כבר $\ln a^n = n \ln a$ וכן $\ln a = -\ln \frac{1}{a}$
וכל שאר התכונות של הפונקציה הלוגריתמית.
המספר e מוגדר כפי שהגדרנו אותו בעבר ע"י $\int_1^e \frac{dt}{t} = 1$

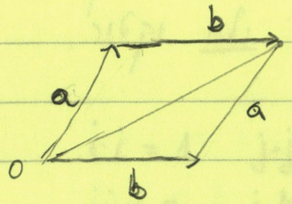
הפונקציה ההפוכה ל $\ln$ ($\ln$ מונוטונית עולה מ 0) תוגדר להיות
$y = \ln x$ $x = E(y)$ נתבונן ב $E(x)$ קיים $E(0)=1$ (כי
$\ln 1 = 0$) כמו כן אם נסמן $E(\alpha)=a$ $E(\beta)=b$ $E(\alpha+\beta)=c$
אז $\alpha = \ln a$ $\beta = \ln b$ $\alpha+\beta = \ln c$
אך $\ln c = \alpha + b = \ln a + \ln b = \ln ab$ ולכן $c = ab$ ואנו מקבלים

$$E(\alpha+\beta) = E(\alpha)E(\beta)$$

בהגדירנו את e כך ש $E(1) = e$ נקבל $E(n) = e^n$ וכו'.

ובדומה לכן $E(\frac{n}{m})=e^{n/m}$ ו $E(-1)=-E(1)$ כי $E(-1)E(1)=E(0)=1$.

וקטורים במישור ובמרחב



סקלר הוא מספר ממשי,

וקטור הוא קטע מכוון.

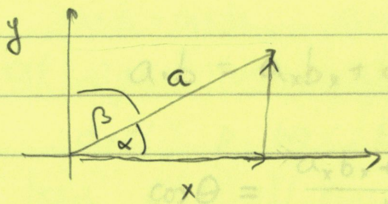
חבור וקטורים:

אם $a+b=0$ אז $b=-a$ וקטור בכוון הפוך ל a ואורך השווה לאורכו של a.

ברור שקיימת קומוטטיביות: $a+b=b+a$

כמו כן סקלר כפול וקטור הוא וקטור שכוונו כוקטור המקורי ואורכו נכפל בסקלר.

פרוק וקטור למרכיבים.



נתבונן במערכת צירים (במישור)

ונסמן את וקטורי היחידה (בעלי אורך 1)

בכוון ציר ה x כ i ובכוון ציר ה y כ j

וקטור נתון a ניתן לפרוק למרכיבים כאשר

$a = a_x i + a_y j$ a_x, a_y ההטלות של a על הצירים

$a_x = a\cos\alpha$

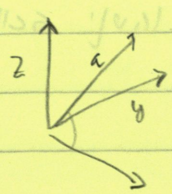
$a_y = a\cos\beta$.

בדומה לכך וקטור במרחב התלת מימדי ניתן לפרוק ע"י

$$a = a_x i + a_y j + a_z k$$

כאשר i, j, k וקטורי היחידה בכווני הצירים ו:

$a_x = a\cos\alpha$ $a_y = a\cos\beta$ $a_z = a\cos\gamma$



כאשר α, β, γ הן הזויות שהוקטור a יוצר עם הצירים x, y, z בהתאמה.

מכפלה סקלרית

אנו מגדירים מכפלה סקלרית של שני וקטורים a ו b ע"י

$$a\cdot b = |a||b|\cos\theta$$

כאשר $|a|$ ו-$|b|$ מסמן את האורך של a ו-b ו-θ הזוית בין a ל-b.

הערה: המכפלה הסקלרית של שני וקטורים הי"א סקלר ולא וקטור.

מההגדרה נובע:

$$i \cdot i = 1 \quad j \cdot j = 1 \quad k \cdot k = 1$$
$$i \cdot j = 0 \quad i \cdot k = 0 \quad j \cdot k = 0$$

קל להראות שקיים

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{וכן} \quad m(a \cdot b) = ma \cdot b = a \cdot mb$$

ועתה אם

$$a = a_x \cdot i + a_y \cdot j + a_z k \qquad b = b_x i + b_y j + b_z k$$

נקבל

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

ומכאן:

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|a| \cdot |b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

כמו כן

$$\frac{a_x}{|a|} = \cos\alpha_x \quad \frac{a_y}{|a|} = \cos\alpha_y \quad \frac{a_z}{|a|} = \cos\alpha_z$$

כאשר $\alpha_x, \alpha_y \alpha_z$ הזויות של a עם ציר x, y, z בהתאמה.

המכפלה הוקטורית.

המכפלה הוקטורית מוגדרת כמכפלה של שני וקטורים במרחב. ובניגוד למכפלה הסקלרית הי"א וקטור הניצב על המישור הנוצר ע"י שני הוקטורים שבמכפלה, אורכו שווה למכפלת אורכיהם ב-sin הזוית ביניהם. נותר לקבוע את המגמה. המגמה נקבעת ע"י

חוק היד הימנית. כאשר הוקטור הראשון בכוון האגודל והשני בכוון האצבע המורה יהיה כוון המכפלה הוקטורית כלפי מעלה.

ואז

$$a \times b = |a||b| \sin\theta \cdot c$$

כאשר c וקטור יחידה בכוון ניצב למישור שנקבע ע"י a ו-b

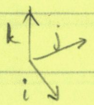
מן ההגדרה נובע מיידית

$$a \times b = -b \times a$$

אם a ו b מקבילים $\sin\theta=0$ ולכן $a\times b=0$ ובפרט
ולכן $a\times a=0$

$$i\times i = j\times j = k\times k = 0$$

אז $i\times j = k \quad k\times i = j \quad j\times k = i$



קל להראות שקיים: $a\times(b+c) = a\times b + a\times c$

<u>הוכחה</u>: אם b',c' ההטלות של b ו c על המישור הניצב ל a
אזי $b'+c'$ היא ההטלה של $b+c$ על מישור זה.
ברור ש $a\times(b'+c') = a\times(b+c) \quad a\times c' = a\times c \quad a\times b' = a\times b$
אך מכיוון ש a ניצב ל b' ו c' $a\times b'$ נמצא במישור הניצב ל a
ואורכו $|a|$ פעמים אורך b' והוא ניצב גם ל b'. כמו כן $a\times c'$
נמצא במישור זה אורכו $|a|$ פעמים אורך c' והוא ניצב ל c'. מכאן
נובע ש $a\times b'+a\times c'$ נמצאו במישור זה ואורכו $|a|$ פעמים האורך של
$b'+c'$ והוא ניצב על $b'+c'$ בזוויות ישרות!

לזכור

$$a\times b' + a\times c' = a\times(b'+c')$$

ומכאן המסקנה!

נחשב עתה את $a\times b$ נניח: $a = a_x i + a_y j + a_z k$
$b = b_x i + b_y j + b_z k$

ואז

$$\begin{aligned}
a\times b &= (a_x i + a_y j + a_z k)\times(b_x i + b_y j + b_z k) = \\
&= a_x b_y k - a_x b_z j + a_y b_x k + a_y b_z i + a_z b_x j - a_z b_y i \\
&= (a_y b_z - a_z b_y) i + (a_z b_x - a_x b_z) j + (a_x b_y - a_y b_x) k \\
&= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ i & j & k \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} a_x & a_y & a_z & a_x & a_y \\ b_x & b_y & b_z & b_x & b_y \\ i & j & k & i & j \\ - & - & - & + & + \quad + \end{array}$$

המכפלה המשולשת

המכפלה המשולשת של 3 וקטורים a,b,c מוגדרת כ:

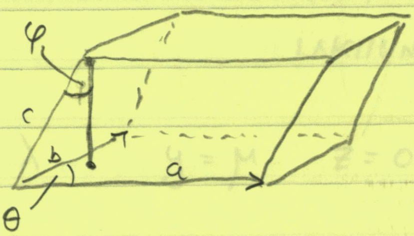
$$[a,b,c] = a\times b \cdot c = (a_y b_z - a_z b_y) c_x + (a_z b_x - a_x b_z) c_y + (a_x b_y - a_y b_x) c_z$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

קל לוודא את היחסים הבאים:

$$[a,b,c] = [b,c,a] = [c,a,b]$$
$$= -[a,c,b] = -[b,c,a] = -[c,b,a]$$

כמו כן קל להוכיח שנפח המקבילון הנפרש ע"י a,b,c הוא $[a,b,c]$



כיון ש $a\times b = |a||b|\sin\theta \cdot p$

כאשר p וקטור יחידה ניצב על מישור הבסיס (הנפרש ע"י a ו b)

$$[a,b,c] = a\times b\cdot c = |a||b|\sin\theta\, p\cdot c = |a|\cdot|b|\sin\theta\cdot|c|\cdot\cos\varphi$$

<u>מסקנה</u>: אם $[a,b,c]=0$ אזי נפח המקבילון הוא 0 כלומר הוקטורים a,b,c נמצאים במישור אחד.

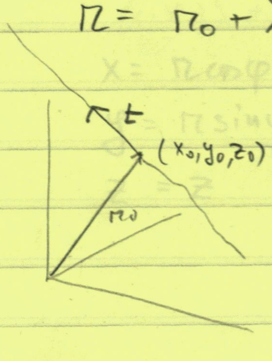
שימושים

נסמן ב r רדיוס וקטור = וקטור שראשיתו בראשית.

אזי כל ישר במרחב ניתן לתאר ע"י

$$r = r_0 + \lambda\cdot t \qquad -\infty < \lambda < \infty \qquad \lambda \text{ סקלר}$$

או אם נכתוב זאת במרכיבים נקבל:



$$x = x_0 + \lambda t_x$$
$$y = y_0 + \lambda t_y$$
$$z = y_0 + \lambda t_z$$

או: $\frac{x-x_0}{t_x} = \frac{y-y_0}{t_y} = \frac{z-z_0}{t_z}$

בדומה לכך משוואת מישור במרחב תנתן ע"י

$$r = r_0 + \lambda t + \mu \cdot s \qquad -\infty < \lambda, \mu < \infty$$

או אם נכתוב זאת בקואורדינטות

$$x = x_0 + \lambda t_x + \mu s_x$$
$$y = y_0 + \lambda t_y + \mu s_y$$
$$z = z_0 + \lambda t_z + \mu s_x$$

דוגמא: $(x_0, y_0, z_0) = 0$

$s = (0,1,0) \qquad t = (1,0,0)$

אזי נקבל את מישור ה x,y שמשוואתו

$$x = \lambda \qquad y = \mu \qquad z = 0$$

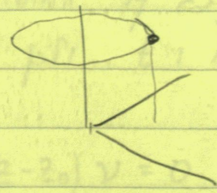
מערכות קואורדינטות.

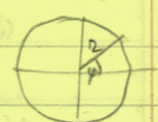
עד כה השתמשנו במרחב בקואורדינטות קרטזיות. במקרים רבים נוח יותר להשתמש במערכות אחרות.

קואורדינטות גליליות.

בקואורדינטות גליליות אנו מתארים כל נקודה במרחב ע"י

(r, φ, z)





כאשר

$$x = r\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$y = r\sin\varphi \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$
$$z = z$$

ראינו שמשוואת מישור היא

$$r = r_0 + hs + kt$$

ובמרכיבים

$$x = x_0 + hs_x + kt_x$$
$$y = y_0 + hs_y + kt_y$$
$$z = z_0 + hs_z + kt_z$$

ע"י חילוף הפרמטרים h ו k ממשוואות אלו נקבל

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ s_x & s_y & s_z \\ t_x & t_y & t_z \end{vmatrix} = 0$$

או $$(r-r_0)\cdot(s\times t) = 0$$

כמשוואת המישור

$s\times t$ הוא בכוון נצב למישור הנפרש ע"י s ו t ולכן
מרכיביו פרופורציונליים לקוסינוסי הכוון (λ,μ,ν) של הנורמל
הניצב למישור ולכן נוכל לכתוב את משוואת המישור

$$\lambda(x-x_0) + \mu(y-y_0) + \nu(z-z_0) = 0$$

או $$ax+by+cz = e$$

אפשר לראות זאת גם בצורה הבאה. נתבונן במישור $r = r_0 + hs + kt$
יהי n וקטור הניצב על המישור הנפרש ע"י s ו t לאמר בפרט
הוא נצב על s ו t ולכן

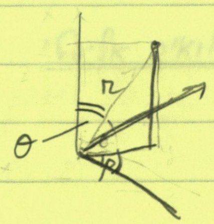
$$0 = (r-r_0)\cdot n = hs\cdot n + kt\cdot n = 0$$

או: $$(x-x_0)\lambda + (y-y_0)\mu + (z-z_0)\nu = 0$$

קואורדינטות כדוריות.

הנקודות במרחב בקואורדינטות כדוריות מתוארות ע"י (r,φ,θ)

כאשר



$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \theta=\arccos\frac{z}{r}$$

קואורדינטות קוטביות במישור

נקודות מתוארות ע"י (r,φ)

$$x=r\cos\varphi$$
$$y=r\sin\varphi$$

דוגמאות פשוטות לשימוש

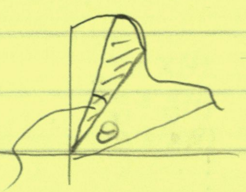
1. מעגל ברדיוס R בקואורדינטות פולריות הוא: $r=R$

ואז: $r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = x^2+y^2=R^2$

חישוב שטח בקואורדינטות פולריות

פונקציה בקואורדינטות פולריות נותנת צורה $r=f(\theta)$

אנו מקרבים את השטח המוקף ע"י שטח המשולש שצלעותיו r וזווית הראש שלו $d\theta$ ולכן



$d\theta$

$$dS=\frac{1}{2}r^2\,d\theta$$

ומכאן שהשטח המוגבל בין שתי זוויות α ו-β והקו $r=f(\theta)$ הוא:

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\theta))^2\,d\theta$$

נחשב שטח מעגל

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\theta = r^2\pi$$

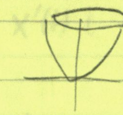
פשוט יותר מאשר בקואורדינטות קרטזיות.

גופים במרחב תלת מימדי

אליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (אליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$)

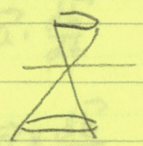
פרבולואיד אליפטי

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$$



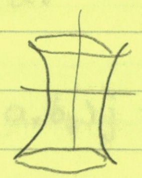
חרוט

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



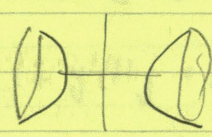
היפרבולואיד חד יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



היפרבולואיד דו יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



נגזרות וקטורים.

בהינתן וקטור $\vec{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$

מגדירים את הנגזרת שלו ע"י

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = x'(t)\,i + y'(t)\,j + z'(t)\,k \qquad (1)$$

מהגדרה זו קל לבדוק שקיים:

$$\frac{d}{dt}\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt} \qquad (2)$$

וכן

$$\frac{d}{dt}\vec{a}\times\vec{b} = \frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b} + \vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt} \qquad (3)$$

להוכחת (3) נזכור כי

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\,i + (a_z b_x - a_x b_z)\,j + (a_x b_y - a_y b_x)\,k .$$

בהינתן וקטור מקום $\vec{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$

הוקטור

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = x'(t)\,i + y'(t)\,j + z'(t)$$

הוא וקטור המהירות

והוקטור

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = x''(t)\,i + y''(t)\,j + z''(t)$$

הוא התאוצה (שינוי המהירות ליחידת זמן).

אורך מסילה

ניתן לתאר מסילה באופן פרמטרי ע"י:

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

או במישור $x = x(t)$ $y = y(t)$.

בהינתן מסילה במישור

השינוי באורך נתון

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

ע"י חלוקה ב-$(\Delta x)^2$ והשאפת $\Delta x \to 0$ נקבל:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

ולכן אורך המסילה מנקודה מסוימת הוא

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

נחשב את אורך מעגל:

$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$yy' = -x \qquad y' = -\frac{x}{y}$$

$$y'^2 = \frac{x^2}{y^2} \qquad 1+y'^2 = \frac{r^2}{y^2}$$

ולכן:

$$\int_0^r \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$\int_0^r \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = r \arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r = \frac{\pi}{2} r$$

אורך המעגל $4r\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi r$.

במרחב קיים:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ולכן

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

כאשר t הפרמטר של המסילה

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}\,dt$$

<u>טענה:</u>

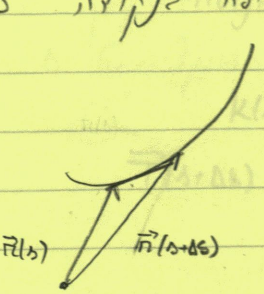
אם המסילה $\vec r = \vec r(t)$ גזירה לפי t, היא גם גזירה לפי s וקיים

$$\frac{d\vec r}{dt} = \frac{d\vec r}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec r}{ds} = \frac{\frac{d\vec r}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\vec r}{dt}\frac{1}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}}$$

לכן אם $\vec r\,'$ שונה מאפס $\left|\frac{d\vec r}{ds}\right| = 1$

כלומר הנגזרת של וקטור המיקום $\vec r(t)$ לפי אורך הקשת הוא וקטור יחידה שנסמן אותו ב $\vec T(s)$

הוקטור $\vec T(s)$ הוא וקטור היחידה המשיק למסילה בנקודה s



$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$\left|\frac{d\vec r}{dt}\right| = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}$$

מרכיבי $\frac{d\vec r}{dt}$ הם $(\dot x, \dot y, \dot z)$

נתבונן עתה בוקטור $\frac{d\vec{T}}{ds}=\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$

מכיון ש $\vec{T}(s)$ הוא וקטור יחידה קיים

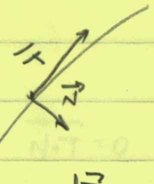
$$\vec{T}(s)\cdot\vec{T}(s)=1$$

וע"י גזירה נקבל $\frac{d\vec{T}}{ds}\cdot\vec{T}=0$

ומכאן שהוקטור $\frac{d\vec{T}}{ds}$ נצב לוקטור המשיק.

נסמן את האורך שלו ב $k(s)$ כאשר $k(s)$

מוגדרת כעקמומיות של המסילה בנקודה s.



הגודל $1/k(s)$ נקרא רדיוס העקמומיות בנקודה s.

נסמן את וקטור היחידה בכוון $\frac{d\vec{T}}{ds}$ ב $\vec{N}(s)$

$\vec{N}(s)$ נקרא הנורמל הראשי של המסילה וקיים

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=k(s)\vec{N}(s) \qquad (1)$$

כאשר המסילה היא קו ישר $\vec{r}(s)=\vec{r}_0+s\vec{u}$ אזי

מקבלים $\vec{r}'(s)=\vec{u}$ $\vec{r}''(s)=0$ כלומר העקמומיות של קו

ישר היא אפס ורדיוס העקמומיות הוא "∞".

בהנתן מעגל במישור הוא נתון באופן פרמטרי כדלקמן

$$\vec{r}(s)=\left(r\cos\frac{s}{r},\ r\sin\frac{s}{r}\right) \Rightarrow \vec{r}'(s)=\left(-\sin\frac{s}{r},\ \cos\frac{s}{r}\right)$$

$$\vec{r}''(s)=\left(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r},\ -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\right) \qquad |\vec{r}''(s)|=|\vec{N}(s)|=\frac{1}{r}$$

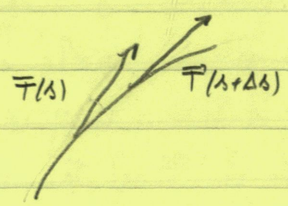
כלומר העקמומיות היא $1/r$ ורדיוס העקמומיות הוא r ומכאן

גם השם רדיוס העקמומיות.

הפרוש הגיאומטרי של העקמומיות נתן ע"י הנוסחא:

$$k(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\theta}{\Delta s}$$

כאשר $\theta(s)$ היא הזוית בין $\vec{T}(s)$ ו $\vec{T}(s+\Delta s)$



נגדיר עתה וקטור נוסף $\vec{B}(s)=\vec{T}(s)\times\vec{N}(s)$ וקטור יחידה ניצב על $\vec{T}(s)$
ו-$\vec{N}(s)$ והוא נקרא הבינורמל של המסילה בנקודה s
השלישיה $(\vec{T}(s),\vec{N}(s),\vec{B}(s))$ היא בסיס ימני בכל נקודה s של המסילה,
צו מערכת צירים (ימנית) הנעה עם המסילה.

ראינו כבר שקיים $$\vec{T}'(s)=\kappa(s)N(s) \qquad (1)$$

נחשב עתה את $\vec{N}'(s)$

$$\vec{N}'(s)=(\vec{N}'(s)\cdot\vec{T}(s))\vec{T}(s)+(\vec{N}'(s)\cdot\vec{N}(s))\vec{N}(s)+(\vec{N}'(s)\cdot\vec{B}(s))\vec{B}(s)$$

כיון ש-$\vec{N}(s)$ וקטור יחידה קיים $\vec{N}'(s)\cdot\vec{N}(s)=0$ וכן $\vec{N}\cdot\vec{T}=0$ ולכן

$$\vec{N}'(s)\cdot\vec{T}(s)+\vec{N}(s)\cdot\vec{T}'(s)=0$$

ומכאן $$\vec{N}'(s)\cdot\vec{T}(s)=-\kappa(s)$$

נסמן את $\vec{N}'(s)\cdot B(s)$ ב-$\tau(s)$ ונקבל:

$$\vec{N}'(s)=-\kappa(s)\vec{T}(s)+\tau(s)\vec{B}(s) \qquad (2)$$

הגודל $\tau(s)$ <u>נקרא הפתול</u> של המסילה, בנקודה s

נחשב עוד את $\vec{B}'(s)$ ונקבל:

$$\vec{B}'(s)=\vec{T}\times N'(s)+\vec{T}'(s)\times\vec{N}(s)=\vec{T}\times(-\kappa\vec{T}+\tau\vec{B})+\kappa\vec{N}\times\vec{N}=$$
$$=\tau\,\vec{T}\times\vec{B}-\kappa+\kappa=-\tau\vec{N}$$

(כי $\vec{T}\times\vec{B}=-\vec{N}$)

ולכן $$\vec{B}'(s)=-\tau\vec{N}(s) \qquad (3)$$

המשוואות (1), (2), (3) נקראות משוואות Frenet ובהינתן $\kappa(s)$ ו-$\tau(s)$
הן קובעות לחלוטין את השלישיה (T,N,B) כפונקציה של s ומכאן
את הצורה של המסילה (עד כדי חפיפה).

פרמטר אורך הקשת הוא נוח לחישובים תיאורטיים, אנו רוצים לקבל את הגדלים κ ו τ גם לפי פרמטר אחר לצורך זה נשתמש במשוואות פרנה.

$$\dot{\vec{T}} = \frac{d\vec{T}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \dot{s}\kappa\vec{N}$$

$$\dot{\vec{N}} = \frac{d\vec{N}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = -\dot{s}\kappa\vec{T} + \dot{s}\tau\vec{B}$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \dot{s}\vec{T}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{s}\vec{T} + \dot{s}^2\kappa\vec{N}$$

$$\dddot{\vec{r}} = \dddot{s}\vec{T} + \ddot{s}\dot{s}\kappa\vec{N} + 2\dot{s}\ddot{s}\kappa\vec{N} + \dot{s}^2\dot{\kappa}\vec{N} + \dot{s}^2\kappa(-\dot{s}\kappa\vec{T} + \dot{s}\tau\vec{B})$$

$$= (\dddot{s} - \dot{s}^3\kappa^2)\vec{T} + (3\dot{s}\ddot{s}\kappa + \dot{s}^2\dot{\kappa})\vec{N} + \dot{s}^3\kappa\tau\vec{B}$$

אנו יודעים ש: $\dot{s} = |\dot{\vec{r}}|$

ועתה:

$$\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}} = \dot{s}\vec{T}\times(\ddot{s}\vec{T} + \dot{s}^2\kappa\vec{N}) = \dot{s}^3\kappa\vec{B}$$

ומכאן

$$\boxed{\kappa = \frac{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}}$$

באופן דומה מקבלים גם:

$$\boxed{\tau = \frac{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}]}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|^2}}$$

בעזרת שתי הנוסחאות האחרונות אנו יכולים לחשב את העקמומיות והפיתול של כל מסילה הנתונה ע"י וקטור מקום.

<u>טענה:</u> תנאי הכרחי ומספיק לכך שמסילה תהיה מישורית הוא $\tau\equiv 0$.

ואומנם:

$$\frac{d}{ds}(\vec{r}\cdot\vec{B}) = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\vec{B} + \vec{r}\cdot\frac{d\vec{B}}{ds} = \vec{T}\cdot\vec{B} - \overset{0}{\tau}\,\vec{r}\cdot\vec{N} = 0$$

כלומר

$\vec{r}\cdot\vec{B} = const$ וזוהי משוואה של מישור כי $\vec{B}$ וקטור קבוע

ולהפך אם המסילה מישורית קיים $\vec{b}$ כך ש $\vec{r}\cdot\vec{b} = c$

ולכן $\vec{T}\cdot\vec{b} = 0$ כי $\vec{T}$ נמצא במישור המסילה ו $\vec{b}$ ניצב לו, ולכן

נגזור $\vec{T}'\cdot\vec{b} = 0$ כלומר $\kappa\vec{N}\cdot\vec{b} = 0$ מכיון ש $\kappa\neq 0$ נקבל $\vec{N}\cdot\vec{b} = 0$

ולכן גם $\vec{N}'\cdot\vec{b} = 0$ $\vec{b}\neq 0$ ניצב גם ל $\vec{T}$ וגם ל $\vec{N}$ ולכן $B = \pm\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

ולכן $\tau = \vec{N}'\cdot\vec{B}$, $\tau = \pm\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{N}'\cdot\vec{B} = 0$

נתבונן עתה במסילת בורג הנתונה ע"י

$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ Helix

ונקבל:

$\dot{\vec{r}}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$

$\ddot{\vec{r}}(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$

$\dddot{\vec{r}}(t) = (a\sin t, -a\cos t, 0)$

ולכן:

$$k = \frac{|\dot{r}\times\ddot{r}|}{|\dot{r}|^3} = \frac{|(ab\sin t, -ab\cos t, a^2|}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{|a|}{a^2+b^2}$$

$$\tau = \frac{b}{a^2+b^2}$$

וחשוב דומה נותן

$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$

(חישוב

<u>הערה</u>: עם $b=0$ המסילה היא מישורית

<u>משוואת מישור.</u>

בהנתן מישור

$$\vec{r} = r_0 + t\vec{u} + s\vec{v}$$

נבחר את המישור הנפרש ע"י $\vec{u}$ ו $\vec{v}$ ויהי $\vec{b}$ וקטור ניצב למישור

זה. אז:

$$\vec{r}\cdot\vec{b} = \vec{r}_0\cdot\vec{b} = c$$

ולכן משוואת מישור במרחב היא $\vec{r}\cdot\vec{b} = c$

או

$$ax + by + cz = d$$

נתייחס עתה לאינטרפרטציה המכנית

נקודה נעה על מסלה $\vec{r}(t)$

מהירות Velocity $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v(t)\cdot T$

כאשר גודל המהירות speed $v(t) = |\dot{\vec{r}}(t)| = \dot{s}(t)$

התאוצה $\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{a}(t)$.

ראינו למעלה

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{s}(t)T + \dot{s}^2(t)\kappa N$$

נוסחא זו מראה שהתאוצה מתפרקת לשני רכיבים התאוצה בכוון
המשיק T שגודלה הוא הנגזרת השניה של הדרך לפי t
ומרכיב בכוון N הנורמלה הראשית שגודלו κv^2.
בהנחה שאנו נעים בתנועה מעגלית (מישורית) $\kappa = \frac{1}{r}$
ואנו מקבלים את פרוק התאוצה, למרכיב משיק ולמרכיב
רדיאלי שגודלו $\frac{v^2}{r}$ והוא מכוון למרכז המעגל.

פונקציות של כמה משתנים

פונקציות של שני משתנים מוגדרות במישור, של שלושה במרחב ושל n במרחב האוקלידי ה-n מימדי.

נקודה במרחב ה-n מימדי נתונה ע"י n-יה $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

המרחק בין שתי נקודות x ו-y נתון על ידי

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

אנו נאמר ש $x \to y$ אם המרחק ביניהן שואף לאפס. זה יתקיים אם ורק אם

$y_i \to x_i \quad i=1,\ldots,n$.

בהמשך נתבונן בפונקציות של שני משתנים. (הטפול ביותר מ 2 אנלוגי).

<u>רציפות</u>: נאמר ש $f(x,y)$ רציפה ב (x_0,y_0) אם קיים

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

בדומה לפונקציות של משתנה אחד, סכום מכפלה והרכב של פונקציות רציפות הוא פונקציה רציפה.

<u>דוגמא</u>: אם $f(x,y,z)$ פונקציה רציפה של (x,y,z) בתחום ואנו מתבוננים במסילה $x=x(t)$ $y=y(t)$ $z=z(t)$ בתחום אז $f(x(t),y(t),z(t))$ היא פונקציה רציפה על המסילה.

וכו'.

הנגזרות החלקיות

פונקציה של יותר ממשתנה אחד ניתן לגזור לפי כל אחד מן המשתנים בנפרד (כאשר מניחים שהשאר המשתנים קבועים).

מגדירים:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

ובדומה לגבי $\frac{\partial f}{\partial y}$

לעיתים מסמנים $\frac{\partial f}{\partial y}$ על ידי f'_x ו f'_y או $D_x f$

בדומה למשתנה אחד ניתן (אם הפונקציה גזירה) לגזור אותה יותר מפעם אחת

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx}$$

וכנ"ל לגבי y.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=f''_{yx}$$

וכן הלאה

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=f'''_{xxx}$$

וכו' ניתן לגזור לפי x ו y כל מספר פעמים שהפונקציה גזירה.

<u>הערה</u>: בתנאים חלשים יחסית על f מתקיים: $f''_{xy}=f''_{yx}$

אנו נניח שהתנאים מתקיימים תמיד.

הם מתקיימים למשל כאשר כל הנגזרות החלקיות רציפות

<u>דוגמאות</u>:

$$f(x,y)=x^2y+4y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2+12y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=24y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=2x$$

באופן גיאומטרי נותנת הנגזרת החלקית את שיפוע המשיק למשטח בנקודה בה היא מחושבת (כשהמשיק או בכוון ציר ה־x או בכוון ציר ה־y).

<u>גזירות ורציפות.</u>

בניגוד למשתנה אחד, הגזירות החלקיות של פונקציה $\frac{\partial f}{\partial x}$ לפי שני המשתנים איננה מבטיחה בהכרח רציפות

דוגמא:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

פונקציה זו אינה רציפה ב $(0,0)$, כי אם נתקרב ל 0 לאורך הקוים $y=\alpha x$ נקבל

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\alpha^2x^2}{x^2+\alpha^2x^2} = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

ולכל α נקבל גבול שונה.

יחד עם זאת לפונקציה זו נגזרות חלקיות ב $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2}{h} = 0$$

נח יותר לעיין

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \\ 0 & (0,0) \end{cases}$$

ובמובן שיש לה נגזרות חלקיות לכל $(x,y)\neq(0,0)$.

דיפרנציאביליות

אנו אומרים שפונקציה של שני משתנים (או יותר) היא דיפרנציאבילית אם

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + Ah + Bk + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k$$

כאשר A ו B בלתי תלויים ב h וא k ו ε_1 ו ε_2 שואפים לאפס כאשר h ו k שואפים לאפס.

אפשר לתאר זאת גם בצורה:

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + Ah + Bk + o(\rho)$$

כאשר $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$ הוא המרחק בין הנקודות $(x+h,y+k)$ ו (x,y)

אם f דיפרנציאבילית יש לה נגזרות חלקיות לפי המשתנים כי

$$f(x+h,y) = f(x,y) + hA + \varepsilon_1 h$$

בחלקנו ב h ובהשאיפנו את h לאפס נקבל $A = \frac{\partial f}{\partial x}$

וכנ"ל לגבי הנגזרת לפי y וכו'.

מהגדרת הדיפרנציאביליות נובע שאם f דיפרנציאבילית היא רציפה. (בנקודה)

נתן להוכיח ואנו לא נוכיח זאת שאם יש ל f נגזרות חלקיות רציפות אזי היא דפרנציאבלית.
(*) ראה (51 א')

נגזרות כווניות

לפונקציה דיפרנציאבלית יש ∞ הנגזרות הכווניות.
נגדיר נגזרת בכוון α

$$D_{(\alpha)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \frac{f(x+\rho\cos\alpha,\, y+\rho\sin\alpha)-f(x,y)}{\rho}$$

מהגדרת הדיפרנציאביליות נובע

$$\left[f(x+\rho\cos\alpha,\, y+\rho\sin\alpha)-f(x,y)\right] = \rho\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \rho\sin\alpha\frac{\partial f}{\partial y} + o(\rho)$$

ע"י חלוקה ב ρ והשאפתו לאפס אנו מקבלים:

$$D_\alpha f(x,y) = f'_x\cos\alpha + f'_y\sin\alpha$$

כאשר $\alpha=0$ הנגזרת היא בכוון x וכאשר $\alpha=\frac{\pi}{2}$ היא בכוון y.

כאשר יש יותר משני משתנים, הכוון מוגדר ע"י קוסינוסי הכוון ומקבלים שהנגזרת בכוון $\vec{e}$ כאשר קוסינוסי הכוון של $\vec{e}$ הם $\cos\alpha_j$

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \sum_{j=1}^{n} \cos\alpha_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

המישור המשיק

בהנתן פונקציה של שני משתנים $z=f(x,y)$ היא מתארת משטח במרחב.

הנגזרת החלקית לפי x של $f(x,y)$ בנקודה מסויימת היא השפוע של המשיק לעקום המתקבל ע"י חתוך המשטח עם מישור נצב לציר ה y ומקביל למישור xz

ובאופן דומה הנגזרת בכוון α נותנת את השפוע של המשיק לעקום המתקבל ע"י חתוך המשטח עם מישור הנצב למישור xy והיוצר

א' 51

טענו שאם f נגזרות חלקיות רציפות היא דיפרנציאבילית. כלומר תנאי מספיק לדיפרנציאביליות הוא קיום נגזרות חלקיות רציפות

נראה שתנאי זה אינו הכרחי

דוגמא! נתבונן בפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

הפונקציה גזירה לפי x וy בראשית וקיים:

$$f_x'(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2 \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 0$$

ובדומה לכך!

$$f_y'(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{k^2\sin\frac{1}{k}}{k} = 0$$

נראה עתה של f דיפרנציאבילית ב $(0,0)$: קיים

$$f(h,k)-f(0,0) = (h^2+k^2)\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

ודי להראות ש $\lim_{(h,k)\to 0}\frac{(h^2+k^2)\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0$ ואכן זה המצב.

נראה עתה שהנגזרות החלקיות של f אינן רציפות בראשית ואכן

$$f_x'(x,y) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

אין הפונקציה זו איננה רציפה ב $(0,0)$ כי עבור $y=0$

$$f_x'(x,0) = 2x\sin\frac{1}{|x|} - \frac{x}{|x|}\cos\frac{1}{|x|}$$

וכאשר $x\to 0$ אין לביטוי גבול!

51 ב'

הגדרת הגרדיינט

תהי $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית נגדיר וקטור

$$\nabla f = grad\, f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$$

במישור

או

$$\nabla f = grad\, f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

במרחב תלת מימדי.

באופן אנלוגי ניתן להגדיר $grad f$ גם במימדים גבוהים יותר.

ראינו שהנגזרת הכיוונית של f בכיוון $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2\, \cos\alpha_3$

נתונה ע"י

$$D_\alpha f = \cos\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \cos\alpha_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \cos\alpha_3 \frac{\partial f}{\partial z} = \nabla f \cdot (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$$

אם נסמן ב $\vec{e}$ את וקטור היחידה שמרכיביו $(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$

נקבל

$$D_\alpha f = \nabla f \cdot e = grad\, f \cdot e \qquad (1)$$

חשיבותו של הגרדיינט היא בכך שבכיוון שלו הפונקציה גדלה ב"מהירות" הגדולה ביותר

ואכן כדי למצוא את הכיוון בו $D_\alpha f$ מקסימאלי (או מינימאלי).

אנו מחפשים את הכיוון בו אגף ימין של (1) מקסימאלי (או מינימאלי)

וזה יתקיים כאשר e הוא בכיוון הגרדיינט (או בכיוון הפוך לו)

במובן הגיאומטרי נסתכל בפונקציה $z=f(x,y)$, קווי הגובה שלה יהיו

$$f(x,y) = c$$

ונסמן אותם במישור (x,y) הנגזרת של $f(x,y)=c$ בכיוון קו הגובה

היא 0 כי אם (x,y) ו (x_0,y_0) נמצאות על קו הגובה

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{\Delta s} = 0$$

אך $D_\alpha f = \nabla f \cdot e_\alpha = 0$ ולכן הגרדינט נצב למשיק לקו הגבה.
נתן לראות זאת גם בצורה הבאה נסמן את קו הגבה ע"י מסלה
$x = x(s)$, $y = y(s)$ (s פרמטר אורך המסלה) ואז

$$c = f(x(s), y(s))$$

ומכאן

$$0 = \frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} x'(s) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(s) = \nabla f \cdot T$$

ולכן הגרדינט נצב למשיק לקו הגבה.

נתבונן עתה בפונקציה של שלושה משתנים $f(x,y,z)$ קוי הגבה שלה יהיו משטחים במרחב התלת מימדי הנתונים באופן סתום ע"י

$$f(x,y,z) = c \qquad (1)$$

נסמן את המישור המשיק למשטח שווה הגבה ע"י

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u} \cdot s + \vec{v} \cdot t$$

כאשר $\vec{u}$, $\vec{v}$ פורשים את המישור העובר בנקודה $\vec{r}_0$.
כשעוברים למרכיבים נקבל

$$x = x_0 + u_x s + v_x t$$
$$y = y_0 + u_y s + v_y t$$
$$z = z_0 + u_z s + v_z t$$

ע"י גזירת (1) לפי s ו t נקבל:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial f}{\partial y} u_y + \frac{\partial f}{\partial z} u_z = 0$$

וגזירה לפי t תתן

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot v_z = 0$$

ולכן $\nabla f \cdot \vec{u} = 0$ $\nabla f \cdot \vec{v} = 0$
וכיון שכל וקטור במישור המשיק הוא קומבינציה ליניארית של $\vec{u}$, $\vec{v}$
∇f נצב על המישור המשיק למשטחי הגבה.

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N \qquad \frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B \qquad \frac{dT}{ds} = \kappa N \qquad \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T}$$

סימונים:

$$a_N = \kappa v^2 \qquad a_T = \frac{d^2 s}{dt^2} \qquad \vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = aT + \kappa v^2 N \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} = v \cdot \vec{T} \qquad \left(v = \frac{ds}{dt}\right)$$

הדיפרנציאל השלם

מגדירים $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

הדיפרנציאל השלם הוא פונקציה של 4 משתנים x, y ו dx, dy.

dx ו- dy נקראים הדיפרנציאלים הבלתי תלויים

אם f גזירה מסדרים גבוהים יותר ניתן ליצור דיפרנציאלים מסדר גבוה יותר למשל

$$d^2 f = d(df) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) dy$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

וכך ניתן להמשיך.

$$d^m f = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-i} \partial y^i} h^{m-i} k^i$$

נוסחאת טיילור בשני משתנים

$z = f(x,y)$ פונקציה של שני משתנים בתחום D ויהי

$$x = x_0 + ht$$
$$y = y_0 + kt$$

נגדיר $F(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$

נניח של f יש לה הנגזרות החלקיות מהסדרים $n, \dots, 1$ והן רציפות, אזי F גזירה לפי t מסדר n וקיים:

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k$$

$$F''(t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right) \cdot h + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right) \cdot k$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

ובאינדוקציה מוכיחים

$$F^{(m)}(t) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} h^{m-i} k^i \frac{\partial^m f(x_0 + ht, y_0 + kt)}{\partial x^{m-i} \partial y^i}$$

משפט טיילור:

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\right)$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}h^{n-i}k^i + \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{\partial^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)}{\partial x^{n+1-i}\partial y^i}h^{n+1-i}k^i$$

הוכחת טענה זו מסתמכת על משפט טיילור במשתנה 1 ט

$$F(1) = F(0) + tF'(0) + \frac{t^2}{2!}F''(0) + \dots + \frac{t^n}{n!}F^{(n+1)}(\theta)$$

וקיים

$$F(1) = f(x_0+h, y_0+k) \qquad F^{(m)}(0) = \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\frac{\partial^m f(x_0,y_0)}{\partial x^{m-i}\partial y^i}h^{m-i}k^i$$

נוח לנצל גם את הסימון

$$d^m f = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m = \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-i}\partial y^i}h^{m-i}k^i$$

ואז

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}df + \frac{1}{2!}d^2f + \dots + \frac{1}{n!}d^nf + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$$

אקסטרמה של פונקציות בכמה משתנים.

תנאי הכרחי לאקסטרמום לוקאלי של פונקציה $f(x_1, \dots, x_n)$ הוא $f_{x_j}(\vec{x}_0) = 0$ כל הנגזרות החלקיות מתאפסות בנקודה

התנאי הכרחי אך במובן אינו מספיק

דוגמא:

$$u = x^2+y^2 \qquad u_x = 2x \qquad u_y = 2y$$

ולכן הנקודה היחידה בה שתי הנגזרות החלקיות מתאפסות היא $(0,0)$ ובה יש לפונקציה מינימום.

<u>דוגמא:</u> $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $\qquad x^2+y^2\le 1$

$$u_x=\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad u_y=\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

הנקודה היחידה בה הנגזרות החלקיות מתאפסות היא שוב הראשית ואנו מקבלים מכסימום בנקודה זו.

<u>תנאים מספיקים</u>

בנקודת אקסטרמום קיים:

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\left(h^2f_{xx}+2hkf_{yx}+k^2f_{yy}\right)+\varepsilon\rho^2$$

$\rho^2=h^2+k^2$ ו-ε שואף לאפס כאשר $\rho\to 0$

לכן בסביבת הנקודה (x_0,y_0) יהיה הסימן של Δf כסימן של הביטוי הריבועי

$$h^2f_{xx}+2hkf_{yx}+k^2f_{yy} \qquad (1)$$

נתבונן לכן בביטוי

$$f(h,k)=ah^2+2bhk+ck^2$$

ונשאל מתי ביטוי זה הוא בעל סימן קבוע.
תנאי מספיק לכך יהיה בעל סימן קבוע (ויתאפס רק ב-$(0,0)$) הוא

$$ac-b^2>0$$

(זאת רואים למשל ע"י חלוקה ב-k^2 ומסמנים $x=\frac{h}{k}$ $\quad ax^2+2bx+c$
וביטוי זה אינו מתאפס כאשר $b^2-ac<0$ (או $ac-b^2>0$))

לכן אם (1) מוגדר חיובית יש לנו מינימום ב-(x_0,y_0)
ואם (1) מוגדר שלילית יש לנו מכסימום ב-(x_0,y_0)

א 54.

דוגמאות נוספות

מצא תיבה בעלת שטח נתון ונפח מכסימאלי.

אם נניח שאורכי הצלעות הם x,y,z הבעיה ניתנת לניסוח

בצורה מצא x,y,z כך ש

$$xyz = \max$$

בתנאי $xy + yz + xz = 1$ (נירמול) (1)

התנאי ההכרחי למכסימום הוא התאפסות הנגזרות: מ(1) נובע שיש לנו למעשה רק שני משתנים בלתי תלויים נניח שהם x ו y ואז: $z=f(x,y)$

$$\frac{\partial}{\partial x}(xyz) = yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(xyz) = xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}$$

מ (1) אנו מקבלים ע"י גזירה לפי x

$$y + y\frac{\partial z}{\partial x} + z + x\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(x+y) = -\frac{y+z}{x+y}$$

וע"י גזירה לפי y

$$x + z + y\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+z}{x+y}$$

ולכן

$$\frac{\partial}{\partial x}(xyz) = yz - xy\frac{y+z}{x+y} = 0 \Rightarrow z - x\frac{y+z}{x+y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(xyz) = xz - xy\frac{x+z}{x+y} = 0 \Rightarrow z - y\frac{x+z}{x+y} = 0$$

ע"י פתרון נקבל $x=y=z$ ומ (1) נקבל $x=y=z=1/\sqrt{3}$

והנפח

$$V = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

O.K.

זהו בודאי מכסימום מקומי (וכיון שבתחום בו הפונקציה מוגדרת אינסופי

$x,y,z \geq 0$ $xy \leq 1$ יש לבדוק האם זה מכסימום גלובאלי.

ומכאן מתקבל:

אם $f_x = f_y = 0$ בנקודה ו $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$

יש לנו נקודת מקסימום או מינימום.

הערך יהיה מקסימום אם $f_{xx} < 0$ (ואז בהכרח $f_{yy} < 0$)

ומינימום אם $f_{xx} > 0$.

דוגמא:

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + ax + by$$

$$f_x = 2x + y + a = 0 \qquad f_y = x + 2y + b = 0$$

פתרון המשוואות הוא

$$x = \frac{1}{3}(b - 2a) \qquad y = \frac{1}{3}(a - 2b)$$

ועתה:

$$f_{xx} = 2 \qquad f_{yy} = 2 \qquad f_{xy} = 1$$

ולכן

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 3 > 0$$

כיון ש f_{xx} בנקודת האקסטרמום $0 <$ יש לנו מינימום בנקודה זו.

דוגמא נוספת

$$z = x^2 - y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (x,y) = (0,0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = -4 - 0 = -4 < 0$$

ולכן אין אקסטרמום בנקודה.

השלמות למכסימה ומינימה של פונקציות של שני משתנים

תנאי הכרחי $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

תנאי מספיק לאכסטרמום: $Z_{xx} Z_{yy} - Z_{xy}^2 > 0$

מכסימום כאשר $Z_{xx} < 0$

מינימום כאשר $Z_{xx} > 0$.

תנאי מספיק "לאוכף" $Z_{xx} Z_{yy} - Z_{xy}^2 < 0$

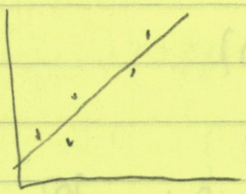
במקרה ש: $Z_{xx} Z_{yy} - Z_{xy}^2 = 0$ המצב לא ברור.

<u>רבועים מינימליים</u> נתונות נקודות במישור (x_i,y_i) $i=1,\dots,n$

המטרה היא לקרב אותן ע"י קו ישר

ש"מרחק" הנקודות ממנו מינימלי

"רבועים מינימליים"



נגדיר $$f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2$$

ואנו מחפשים מינימום של f

$$\frac{\partial f}{\partial a}=2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)x_i=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}=2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}=-2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}=-2n \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial a\partial b}=-2\sum x_i$$

מכיון ש $$f_{aa}f_{bb}-f_{ab}^2=4\left(n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2\right)$$

אך מאי שויון קושי שוורץ $$\left(\sum a_ib_i\right)^2\le\left(\sum a_i^2\right)\cdot\left(\sum b_i^2\right)$$

אנו מקבלים

$$\left(\sum x_i\cdot 1\right)^2\le\left(\sum x_i^2\right)\cdot\sum 1^2=n\sum x_i^2 \ \dots$$

(שויון קיים רק כאשר כל ה $x_i=1$)

ומכאן

$$f_{aa}f_{bb}-f_{ab}^2>0$$

ולכן יש לנו כאן מינימום לוקלי. כיון שהוא יחיד והפונקציה שואפת לאינסוף כאשר $a,b\to\infty$ זהו מינימום גלובאלי.

<u>הערה:</u> ניתן להראות ש: $n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-x_j)^2>0$

המשוואות (1) ו(2) נותנות עבור a ו b 2 משוואות ב 2 נעלמים a,b

$$a\langle x^2\rangle+b\langle x\rangle=\langle xy\rangle$$
$$a\langle x\rangle+b\cdot n=\langle x\rangle$$

אותן פותרים ל a ו b.

דוגמא נוספת

תהי

$$f(x,y)=x^4+y^4-x^2-y^2+1$$

נחשב את הנקודות החשודות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3-2x=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-2y=0$$

לכן: $(0,0)$ חשודה ואז: $4x^2-2=0$ $\quad$ $4y^2-2=0$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ונקודות חשודות נוספות הן: $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ $(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$

נחשב עתה את הנגזרות השניות בנקודות המתאימות:

ב $(0,0)$ $\quad f_{xx}=-2 \quad f_{yy}=-2 \quad f_{xy}=0$

ב $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ $\quad f_{xx}=4 \quad f_{yy}=4 \quad f_{xy}=0$

ב $(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ $\quad f_{xx}=-2 \quad f_{yy}=4 \quad f_{xy}=0$

ב $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ $\quad f_{xx}=4 \quad f_{yy}=-2 \quad f_{xy}=0$

לכן ב $(0,0)$ $\quad f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}=-4<0$

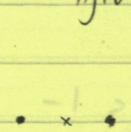
ב $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ $\quad f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}=-16$

וב $(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ $\quad f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}=8$

לכן יש לנו אקסטרמה בנקודות $(0,0)$ ו $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ בראשונה מכסימום

וב 4 הנוספות מינימום.

בעוד שהשאר הן נקודות אוכף



(ניתן להראות שאם $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2<0$ זוהי נק' אוכף)

אפשר להראות שהמינימה ב 4 הנקודות הוא אבסולוטי.

המכסימום הוא מקומי כפי שניתן לראות כאשר $x,y\to\infty$.

אינטגרל קוי

בהנתן מסילה $x=x(t)$ $y=y(t)$ $z=z(t)$ במרחב נגדיר:

$$\int_C f(x,y,z)\,dx = \int f(x(t),y(t),z(t))\,\dot{x}(t)\,dt$$

ובדומה

$$\int_C f(x,y,z)\,dy = \int f\,\dot{y}\,dt$$

$$\int_C f(x,y,z)\,dz = \int f\,\dot{z}\,dt$$

בד״כ מופיע האינטגרל הקוי בהקשר הבא:

נתונות 3 פונקציות $a(x,y,z)$, $b(x,y,z)$, $c(x,y,z)$ ומסילה C ואנו מחשבים

$$\int_C a\,dx + b\,dy + c\,dz = \int_\alpha^\beta (a\dot{x} + b\dot{y} + c\dot{z})\,dt$$

אם נסמן את הוקטור $\vec{r}(t) = (x(t),y(t),z(t))$ ונחשוב על "שדה וקטורי"

$$\vec{A} = ai + bj + ck$$

בכל נקודה של המרחב יש לנו וקטור $\vec{A}$ אזי האינטגרל של השדה לאורך המסילה ניתן ע"י:

$$\int_\alpha^\beta A\cdot\dot{r}\,dt = \int_C A\cdot dr = \int_C A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz$$

כנ"ל במקרה של שני משתנים.

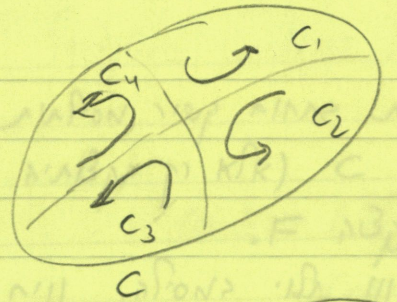
אם A הוא שדה כח אזי האינטגרל נותן את העבודה הנדרשת לעבור מנקודה עם הפרמטר α לנקודה עם הפרמטר β.

נתרכז עתה במקרה הדו מימדי.

<u>תכונות</u>

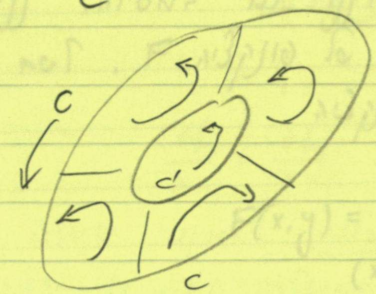
- כאשר עוברים את המסילה בכוון ההפוך האינטגרל נכפל ב -1
- כאשר המסילה ניתנת לתאור כאיחוד מסילות C_1 ו-C_2 אזי

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$$



$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$$

הסיבה היא שלאורך "הקטעים" המשותפים האינטגרלים מצטמצמים.



דוגמא נוספת למצב כזה כאשר C "טבעת"

ולכן

$$\sum \int_{C_i} = \int_C - \int_{C'}$$

– אם L הוא אורך המסילה ו M חסם של אורך הוקטור (a,b,c) כלומר $M \ge \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ לכל (x,y,z) אז

$$\left|\int A\,dr\right| \le ML$$

דבר זה נובע מידית מאי-שוויון קושי שוורץ

$$|A\cdot \dot{r}| = |a\dot{x} + b\dot{y} + c\dot{z}| \le \sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} \le M\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$

אך

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt = L$$

ומכאן התוצאה.

מקרה בעל חשיבות גדולה בשימושים הוא המקרה בו השדה A הוא גרדינט של פונקציה F. במקרה זה $a=F_x$ $b=F_y$ $c=F_z$ ו

$$\int_C \operatorname{grad} F\cdot dr = \int_{t_0}^{t_1} (F_x\cdot\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z})\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dF}{dt}\cdot dt =$$

$$= F(x(t_1),y(t_1),z(t_1)) - F(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$$

ואין תלות במסילה.

מסקנה

$$\oint \operatorname{grad} F\cdot dr = 0$$

האינטגרל על מסילה סגורה בתחום בו F גזירה ברציפות מתאפס.

נציין את המשפט הבא:

<u>משפט</u> בהנתן שדה וקטורי A בעל נגזרות רציפות בתחום קשיר מסילתית
אזי האינטגרל $\int_C A\cdot dr$ איננו תלוי במסילה C (אלא רק בקצותיה
אם ורק אם השדה A הוא גרדיינט של פונקציה F.

<u>הוכחה:</u> ראינו כבר שאם $A=\text{grad}F$ האינטגרל איננו תלוי במסילה. נניח
עתה שבהו המצב ונראה שאכן A הוא גרדיינט של פונקציה F. לשם כך
נבחר נקודה קבועה בתחום (x_0,y_0) ונגדיר פונקציה

$$F(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} a\,dx+b\,dy$$

בלי תלות במסילה המחברת את הנקודות שכן האינטגרל לא
תלוי במסילה. כדי לחשב את הנגזרות של F נתבונן ב

$$F(x+h,y)-F(x,y)=\int_{(x,y)}^{(x+h,y)} a\,dx+b\,dy$$

כיון שאין תלות במסילה נבחר אותה כקטע הישר המקביל לציר ה x מ
בין x ל $x+h$ ואז

$$F(x+h,y)-F(x,y)=\int_x^{x+h} a(\xi,y)\,d\xi$$

ומכאן

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h,y)-F(x,y)}{h}=a(x,y)$$

וקיים $\frac{\partial F}{\partial x}=a$ ובדומה, לכן $\frac{\partial F}{\partial y}=b$ ואכן F הפוטנציאל
של השדה (a,b). □

<u>הגדרה:</u> שדה וקטורי רציף המוגדר על קבוצה קשירה מסילתית ב $\mathbb{R}^n$
נקרא משמר אם הערך של $\int_\gamma \Sigma f_j\,dx_j$ איננו תלוי במסילה אלא
רק בקצותיה.

תנאי הכרחי ומספיק לכך ששדה הוא שדה משמר ש $\oint A\cdot dr=0$
כלומר האינטגרל על כל מסילה סגורה מתאפס.

ראינו שׁשדה הוא משמר אם הוא גרדיינט של פונקציית פוטנציאל במקרה זה קיים:

$$(a,b) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

ולכן $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$ (מרציפות הנגזרות)

באופן כללי אם השדה משמר קיים

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

שדה המקיים תנאי זה נקרא <u>שדה משמר לוקלית</u>, ראינו ששדה משמר הוא שדה משמר לוקאלית ונשאלת השאלה האם כל שדה משמר לוקאלית הוא שדה משמר. התשובה נתונה במשפט הבא:

<u>משפט</u> שדה משמר לוקאלית בתחום קשיר מסילתית <u>פשוט הקשר</u> ("בלי חורים") הוא שדה משמר.

לא נוכיח את המשפט אך נראה שאם התחום איננו פשוט הקשר שדה משמר לוקאלית איננו משמר.

לשם כך נתבונן בשדה (a,b) $\quad b = \frac{x}{x^2+y^2} \quad a = -\frac{y}{x^2+y^2}$

השדה משמר לוקלית בתחום $0 < x^2+y^2$. נתבונן בתחום הלקוי $\frac{1}{2} < x^2+y^2 < 2$ קיים

$$\frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ולכן

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

נחשב עתה את $\int_C a\,dx + b\,dy$ על המעגל $x^2+y^2=1$

נציג אותו בצורה פרמטרית ע"י $x=\cos t$ $y=\sin t$

ואז

$$\int_C a\,dx + b\,dy = \int_0^{2\pi} (\underset{a}{-\sin t}\cdot\underset{\dot{x}}{(-\sin t)} + \underset{b}{\cos t}\cdot\underset{\dot{y}}{\cos t})\,dt = 2\pi \neq 0$$

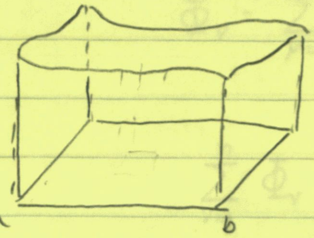
ולכן השדה איננו משמר.

אינטגרלים ביותר ממשתנה אחד.

נתבונן ב $u=f(x,y)$ מוגדרת ורציפה על מלבן $a\le x\le b$
$c\le y\le d$.

אנו רוצים לחשב את הנפח של הגוף הנוצר ע"י המשטח $u=f(x,y)$
והמישורים $x=a$ $x=b$ $y=c$ ו $y=d$

אם $u=f(x,y)$ היא פונקציה קבועה ושווה ל k
הנפח יהיה



$$V=(b-a)(d-c).k$$

אנו מחלקים עתה את הבסיס למלבנים קטנים $\Delta R_i=\Delta x_i\cdot\Delta y_i$ נסמן ב m_i את המינימום של $f(x,y)$ על פני המלבן $\Delta x_i\Delta y_i$ וב M_i את המכסימום שלה ואז

$$\sum m_i\Delta R_i\le V\le\sum M_i\Delta R_i \qquad (1)$$

אנו מקטינים עתה את בסיסי המלבנים ונותנים ל $\max\Delta x_i$ ו $\max\Delta y_i$ לשאוף לאפס ואז שני הסכומים ב(1) ישאפו לגבול משותף וגבול זה יוגדר כנפח הנדרש ונסמן את הגבול האמור ב

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \qquad (2)$$

נקל לראות שאם בכל מלבן נבחר נקודה (x_i,y_i) כלשהי אזי

$$\lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\sum f(x_i,y_i)\Delta R_i=\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \qquad (3)$$

הסכום באגף שמאל נמצא בין הסכום העליון (אגף ימין של (1)) לבין הסכום התחתון (אגף שמאל של (1)).

__טענה:__ (ללא הוכחה) אם $f(x,y)$ רציפה במלבן R (או שיש לה אי רציפות קפיצה, לאורך מספר סופי של קוים חלקים $y=f(x)$ או $x=\varphi(y)$) אזי האינטגרל הכפול קיים.

__הערה:__ בהגדרת האינטגרל (3) אין צורך להניח ש $0\le f(x,y)$ ולכן האינטגרל איננו דוקא הנפח הכלוא בין המשטח והמישורים המתאימים.

נסקור בקצרה את ההוכחה.

$$\iint_{\square} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m} f(a+\mu h,\ c+\nu k)\, h\cdot k$$

כאשר $\quad h=\dfrac{b-a}{m} \qquad k=\dfrac{d-c}{n}$

נגדיר

$$\Phi_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} f(a+\mu h,\ c+\nu k)\, h$$

ואז הסכום שאחרי הגבול ניתן להכתב כ

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Phi_\nu k$$

כאשר $h\to 0$ $(m\to\infty)$ אנו מקבלים

$$\Phi_\nu \to \int_a^b f(x,\ c+\nu k)\,dx = \varphi(c+\nu k)$$

ולכן כאשר $k\to 0$ $(n\to\infty)$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Phi_\nu k \longrightarrow \int_c^d \varphi(y)\,dy$$

אך $\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ ומכאן

$$\iint_{\square} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$$

וגם בסדר ההפוך. <u>ולכן אפשר להחליף את סדר האינטגרציה.</u>

<u>דוגמאות:</u>

$$\int_0^1\left(\int_1^2 2xy\,dx\right)dy = \int_0^1 x^2y\Big|_1^2\,dy = \int_0^1 (4y-y)\,dy = \int_0^1 3y\,dy = \frac{3y^2}{2}\Big|_0^1 = \quad (1)$$

$$= \frac{3}{2} - 0 = 1.5$$

$$\iint_{O} x^2y^2\,dx\,dy = 2\int_{-1}^{1} x^2dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} y^2dy = \int_{-1}^{1} x^2dx\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\frac{1}{3}\int_0^1 x^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3dx = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^2t\cos^3t\cdot\cos t\,dt$$

$x=\sin t$

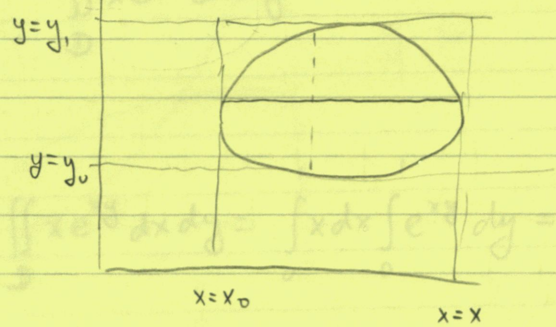
$\frac{dx}{dt}=\cos t$

$dx=\cos t\,dt$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^2t\cos^4t\,dt = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}(\cos^4t-\cos^6t)\,dt$$

את התוצאה הקודמת ניתן להכליל לאינטגרציה על פני גוף שאיננו בהכרח מלבן.

נתבונן בגוף קמור



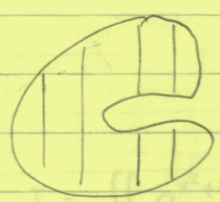
נרחיב את הפונקציה כאפס על מלבן המכיל את הגוף. ואז

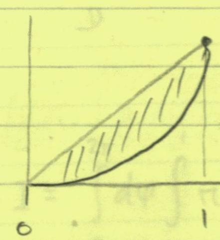
$$\int_a^b dx \int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dy = \int_{x_0}^{X} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

או אם מבצעים בסדר הפוך נקבל

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

גם כשהגוף איננו קמור אך ניתן לפרוק מבצעים את האינטגרציה על הקטעים הצרים.





דוגמא:

על התחום המצויר נתונה הפונקציה

$$f(x,y) = x^2 + 2y$$

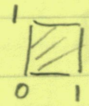
אז

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} (x^2+2y)\,dy \right) dx = \int_0^1 x^2y + y^2 \Big|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (x^3+x^2-2x^4)\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{2}{5}x^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{15+20-24}{60} = \frac{11}{60}$$

נראה עוד דוגמא:

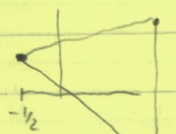
$$\iint_D x e^{xy}\,dx\,dy$$

כאשר D הוא הריבוע 

$$\iint_D x e^{xy}\,dx\,dy = \int_0^1 x\,dx\int_0^1 e^{xy}\,dy = \int_0^1 x\left[e^{xy}\cdot\frac{1}{x}\right]_0^1 dx = \int_0^1 x\left(e^{x}\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right) = \int_0^1 (e^{x}-1)\,dx$$

דוגמא נוספת:

התחום R הוא המשולש שהקואורדינטות של קדקדיו $(1,-1)$ $(1,2)$ $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$



$$f(x,y) = x^2+y$$

$$\iint_R (x^2+y)\,dx\,dy = \int_{-1/2}^{1} dx\int_{-x}^{1+x}(x^2+y)\,dy = \int_{-1/2}^{1}\left[x^2y+\frac{y^2}{2}\right]_{-x}^{1+x} dx =$$

$$= \int_{-1/2}^{1}\left[2x^3+x^2+x+\frac{1}{2}\right]dx = \frac{2x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\Big|_{-1/2}^{1} = \frac{63}{32}$$

תרגיל נוסף

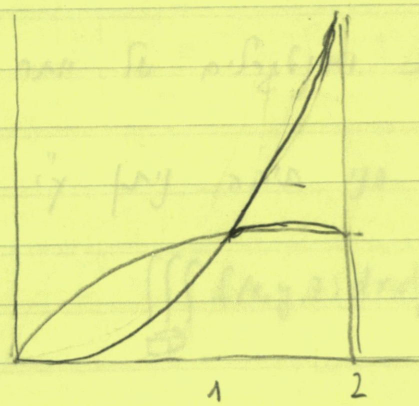
$$I = \iint_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

כאשר $D=\{x^2+y^2\le 1\}$

ע"י מעבר לקואורדינטות קוטביות נקבל

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 r e^{r^2}\,dr = 2\pi\,\frac{e^{r^2}}{2}\Big|_0^1 = \pi(e-1)$$

'ב 64



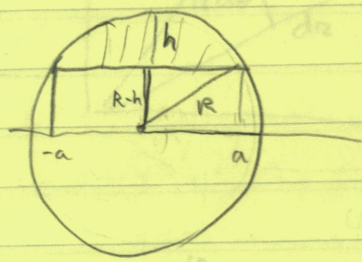
$y = x^2$

$y = \sqrt{x}$ $\qquad f(x,y) \equiv 1$

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^{x^2} dy = \int_1^2 (x^2 - \sqrt{x})\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{\sqrt{8}}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 3 - \frac{\sqrt{8}}{3}$$



$$\int_{-a}^{a} \left(\sqrt{R^2 - x^2} - (R-h)\right) dx$$

$$\int_0^1 x\,dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy = \int_0^1 x \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{x^4}{2}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{6} - \frac{x^6}{10}\Big|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$$

ניתן להכליל את הדיון הקודם, לפונקציות ואינטגרלים של יותר משתנים.

אינטגרל של פונקציה של שלושה משתנים על פני תיבה ניתן ע"י

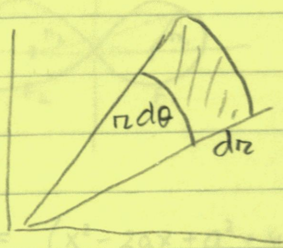
$$\iiint_{\square} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx\int_c^d dy\int_e^f f(x,y,z)\,dz$$

וכן בסדר שונה.

גם כאשר הגוף אינו בהכרח קוביה ניתן לבצע אינטגרציה בדומה למצב באינטגרציה כפולה.

קואורדינטות קוטביות במישור

ניתן לתאר את נקודות המישור ע"י מערכת קואורדינטות קוטביות (r,θ) כאשר r המרחק מן הראשית ו θ הזוית עם ציר ה x. במקרים רבים נוח לחשב שטחים של גופים כשהם נתונים בקואורדינטות קוטביות



אלמנט השטח יהיה $r\,dr\,d\theta$

ולכן האינטגרל של פונקציה המוגדרת בקואורדינטות קוטביות על פני תחום

$$R_\theta \begin{cases} r_1 \le r \le r_2 \\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \end{cases}$$

יהיה

$$\iint_R f(r,\theta)\,ds = \int_{r_1}^{r_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r f(r,\theta)\,d\theta\,dr$$

חישוב שטח בקואורדינטות קוטביות

$$dS = \frac{1}{2} r^2\,d\theta$$

ולכן $S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,d\theta$

דוגמא:

נחשב שטח עיגול ברדיוס r ונקבל ישירות $S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\theta = \pi r^2$

<u>דוגמא 2</u>

נחשב את האינטגרל $I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$

$$I^2=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

ע"י מעבר לקואורדינטות קוטביות נקבל

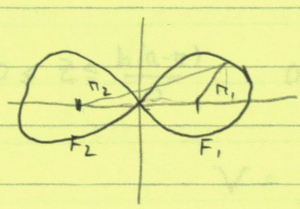
$$I^2=\int_0^{\infty}dr\int_0^{2\pi} e^{-r^2}r\,d\theta = 2\pi\int_0^{\infty} re^{-r^2}dr = 2\pi\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{\infty} = \pi$$

ולסיכום $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

וכיון שהפונקציה סימטרית נקבל גם

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

<u>דוגמא 3</u> למניסקטה, המקום הגיאומטרי של הנקודות P שעבורה
מכפלת המרחקים r_1 ו- r_2 משתי נקודות קבועות F_1 ו F_2 שקואורדינטות
שלה $(a,0)$ $(-a,0)$ היא קבועה ושווה ל a^2



$$r_1^2=(x-a)^2+y^2 \qquad r_2^2=(x+a)^2+y^2$$

ומכאן נקבל

$$a^4=(x^2-2ax+a^2+y^2)(x^2+2ax+a^2+y^2)=$$
$$= x^4+\cancel{2ax^3}+\cancel{a^2x^2}+x^2y^2-\cancel{2ax^3}-\cancel{4a^2x^2}-\cancel{2a^3x}-\cancel{2axy^2}$$
$$+\cancel{a^2x^2}+\cancel{2a^3x}+\cancel{a^4}+a^2y^2+y^2x^2+\cancel{2axy^2}+a^2y^2+y^4=\cancel{a^4}$$
$$=(x^2+y^2)^2-2a^2x^2+2a^2y^2=0$$

או:
$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$$

וזו משוואת הלמניסקטה

נוח להציג אותה בקואורדינטות קוטביות ואז נקבל

$$r^4-2a^2r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=0 \Rightarrow r^2=2a^2\cos 2\theta$$

נחשב עתה את השטח של אחת מן הלולאות ("החוספות") אנו נקבל לולאה כזו ע"י שינוי θ מ $-\frac{\pi}{4}$ עד $\frac{\pi}{4}$ ואזי השטח נתון ע"י

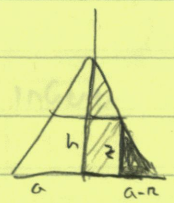
$$S=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2a^2\cos 2\theta\,d\theta=a^2\left.\frac{\sin 2\theta}{2}\right|_{-\pi/4}^{\pi/4}=a^2$$

קואורדינטות גליליות במרחב.

במרחב ותלת מימדי אנו משתמשים בקואורדינטות פולריות (קוטביות) במישור ואת הקואורדינטה בכוון ציר z כ- z
אלמנט הנפח יהיה עם כן

$$r\,dr\,d\theta\,dz$$

וכן .
$$x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta \qquad z=z$$



נחשב נפח של חרוט שבסיסו ברדיוס a וגובהו h
כשאנו נמצאים ב r מסויים הגובה המכסימאלי הוא $z=\frac{h}{a}(a-r)$ (כי המשולשים דומים) ולכן החרוט מוגדר ע"י אוסף הנקודות $0\le r\le a \quad 0\le\theta\le 2\pi$

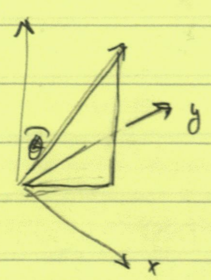
$$0\le z\le\frac{h(a-r)}{a}$$

ומכאן

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r\,dr\int_0^{\frac{h(a-r)}{a}}dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^a r\frac{h}{a}(a-r)\,dr=2\pi\left(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{6}\right)\cdot\frac{h}{a}=\frac{1}{3}\pi a^2h$$

קואורדינטות כדוריות



במרחב התלת מימדי נוח לפעמים להשתמש בקואורדינטות כדוריות ולא גליליות. במישור (x,y) אנו ממשיכים להשתמש בקואורדינטות קוטביות ולגבי ציר ה z בזוית בינו ובין הרדיוס וקטור אל הנקודה.

<u>דוגמא:</u>

נחשב את הנפח המוגבל בהיפרבולואיד חד יריעתי $x^2+y^2-\frac{z^2}{c^2}=1$

בין המישורים Z ו $-Z$

ע"י מעבר לקואורדינטות גליליות נקבל $r^2-\frac{z^2}{c^2}=1$ $\quad r^2=1+\frac{z^2}{c^2}$

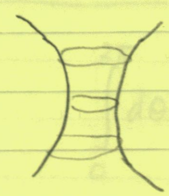
ועתה הנפח של הגוף המבוקש יהיה

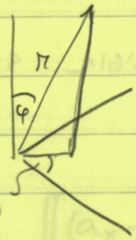
$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-Z}^{Z} dz \int_0^{r(z)} r\,dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-Z}^{Z} \frac{r^2}{2}\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-Z}^{Z}\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)dz =$$

$$= \pi\left(z+\frac{z^3}{3c^2}\right)\Big|_{-Z}^{Z} = 2\pi\left(Z+\frac{Z^3}{3c^2}\right).$$

כאשר $c\to\infty$ ההיפרבולואיד הופך להיות הגליל $x^2+y^2=1$ ששטחו π

וגובהו $2Z$.



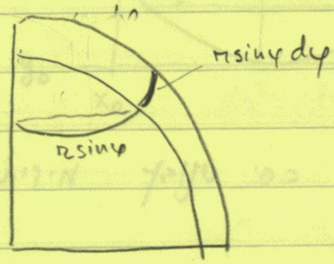


הנקודה (x,y,z) תנתן ע"י

$$z = r\cos\varphi$$
$$x = r\sin\varphi\cos\theta$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$

אלמנט הנפח $dxdydz$ יעבור להיות $r^2\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta\, dr$

יוצא מכיון שאלמנט טיפוסי נמצא בין שני כדורים ברדיוסים r ו $r+dr$ שני מישורים נצבים על מישור x,y בזויות θ ו $\theta+d\theta$ ובין שני מעגלים על הכדור ברדיוס r בין הזויות φ ו $d\varphi$. לכן שטח הבסיס יהיה $r\,d\theta\, dr$ והגובה יהיה $r\sin\varphi\, d\varphi$,



נפח כדור ברדיוס R נתון איפוא ע"י

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 dr\, \left[\cos\varphi\right]_0^{\pi} = 4\pi \int_0^R r^2 dr =$$
$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$x^2+y^2+z^2 = r^2$$
$$\varphi = \arccos\frac{z}{r}$$
$$\theta = \arctan\frac{y}{x}$$

אחרי אינטגרלים כפולים

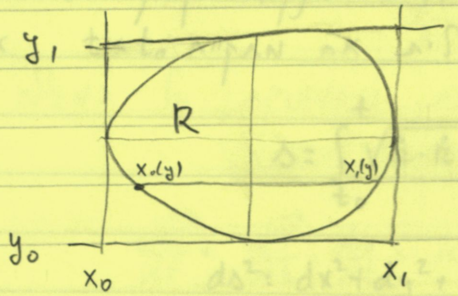
69

משפט Gauss

תהיינה $a(x,y)$ ו $b(x,y)$ בעלות נגזרות חלקיות רציפות בתחום R חסום המוגבל בקוים חלקים למקוטעין אזי קיים:

$$(*) \qquad \iint_R (a_x + b_y)\,dx\,dy = \int_{+C} a\,dy - b\,dx$$

כאשר האינטגרל באגף ימין הוא אינטגרל קוי לאורך השפה של התחום R כשהוא נלקח בכוון החיובי.



סקירת הוכחה:

$$(1) \qquad \iint_R a_x(x,y)\,dx\,dy = \int_{y_0}^{y_1} a(x_1(y),y)\,dy + \int_{y_1}^{y_0} a(x_0(y),y)\,dy$$

אם נניח ש $b \equiv 0$ אזי מאשר בדיוק את (*) כפי שנובע מידית מהגדרת האינטגרל הקוי כי

$$\int_C a_x(x,y)\,dy = \int a(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)\,dt$$

ובבחרנו את y כפרמטר נקבל

$x = x(y) \qquad y = y \qquad \dot{y} = 1$

(הנחנו כאן שכל קו המקביל לציר הx"ים חותך את המסילה רק בשתי נקודות

בדומה לכן אם נניח שכל קו המקביל לציר הy"ים חותך את המסילה רק בשתי נקודות נקבל

$$\iint_R g(x,y)\,dx\,dy = -\int_{+C} g(x,y)\,dx$$

ומכאן המסקנה.

מסקנה: אם ב(*) נבחר $b=0$ ו $a=x$ נקבל

$$S(R) = \iint_R dx\,dy = \int_{+C} x\,dy$$

או באותן אנלוגי $a=0$.

$$S(R) = \iint_R dx\,dy = -\int_{+C} y\,dx$$

חזרה על נגזרת על מסילה

בהנתן וקטור $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ אזי אורך הקשת בין $t=\alpha$ ו $t=\beta$ נתון ע"י

$$L(\alpha,\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt \Leftrightarrow L = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\vec{r}}(t)|\, dt$$

אם נסמן ב s את אורך הקשת הנמדדת מנקודה קבועה t_0 לנקודה משתנה t (s חיובית אם $t>t_0$) ושלילית אם מתקיים $t<t_0$ אזי

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}}\, dt \Rightarrow \frac{ds}{dt} = |\dot{\vec{r}}|$$

או פורמאלית

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = |d\vec{r}|^2$$

בהנתן מסילה $\vec{r}(s)$ כאשר s אורך הקשת אזי

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\Big/\frac{ds}{dt} = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}$$

ולכן $\frac{d\vec{r}}{ds}$ הוא וקטור יחידה, בכוון המשיק.

נניח ש $\vec{r}(t)$ מתאר מקום של גוף ברגע t אזי

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$$

היא המהירות שלו הכוון ש $\frac{d\vec{r}}{dt}$ הוא כוון המשיק וארכו

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

הוא המהירות הסקלרית שלו.

כאשר אנו גוזרים את $\vec{V}(t)$ אנו מקבלים את התאוצה.

$$\vec{V}(t) = v(t)\cdot\vec{T} = \dot{s}\vec{T}$$

ע"י גזירה נוספת נקבל

$$\vec a(t) = \frac{d\vec v}{dt} = \ddot s \vec T + \dot s \dot{\vec T}$$

כאשר $\vec T$ הוא וקטור היחידה בכוון המשיק. מכיון ש $\vec T \cdot \vec T = 1$
אנו מקבלים כאשר גוזרים לפי אורך המסילה

$$\frac{d\vec T}{ds}\cdot \vec T = 0$$

כלומר $\frac{d\vec T}{ds}$ הוא וקטור הניצב על המשיק. אנו קוראים לו הוקטור
הנורמלי למסילה ומסמנים את וקטור היחידה בכוונו ב $\vec N$ ואז

$$\frac{d\vec T}{ds} = \kappa \vec N$$

כאשר κ האורך של $\frac{d\vec T}{ds}$ ו κ נקראת העקמומיות של המסילה
$1/\kappa$ נקרא רדיוס העקמומיות. נחזור עתה לתאוצה.

$$\frac{d\vec T}{dt} = \frac{d\vec T}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \kappa \vec N \cdot v$$

ולכן:

$$\vec a(t) = \frac{d\vec v}{dt} = \ddot s \vec T + \dot s^2 \kappa \vec N$$

כלומר לתאוצה יש מרכיב בעל אורך $\frac{d^2 s}{dt^2}$ בכוון התנועה
ומרכיב בעל גודל $v^2\kappa$ בכוון ניצב לתנועה.
ברור מן ההגדרות גם כמובן:

$$\vec a(t) = \ddot x(t)\vec i + \ddot y(t)\vec j + \ddot z(t)\vec k$$

דוגמא אחרת: $\quad -\frac{y}{y^2+z^2} \qquad \frac{z}{z^2+y^2} \qquad \frac{1}{x}$

$$F = \left(\frac{z^3+zy^2}{xz^3+xy^2z} \,,\ \frac{xz^2}{xz^3+xy^2z} \,,\ \frac{xz^3+xy^2-xyz}{xz^3+xy^2z} \right)$$

$$F_x = \frac{1}{x} \qquad F = \log x + G(y,z)$$

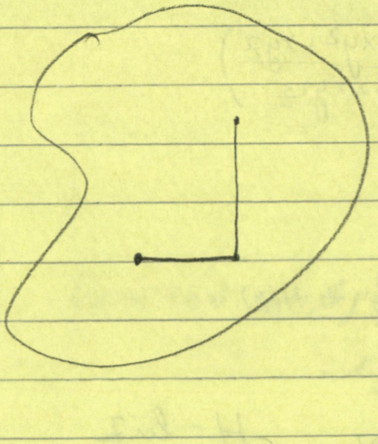
$$F_y = G_y = \frac{z}{z^2+y^2} \qquad G = \arctan\frac{y}{x} + H(z)$$

$$F_z = G_z = -\frac{y}{y^2+z^2} + H'(z) = \frac{1}{z} - \frac{y}{y^2+z^2} \qquad H = \ln z$$

$$F = \arctan\frac{y}{x} + \ln xz$$

$z^3z\,xy^2+xy$

בהינתן שדה משמר, כיצד למצוא את הפוטנציאל:



נניח שהשדה הוא

$$\vec{A} = (x^2 + y\sin x)\vec{i} + (y^3 - \cos x)\vec{j}$$

ראשית נבדוק אם השדה מקיים את

התנאי ההכרחי כלומר

$$\sin x = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y\sin x) = \frac{\partial}{\partial x}(y^3 - \cos x) = \sin x$$

ולכן השדה משמר

נחשב את פונקצית הפוטנציאל שלו כדלקמן

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x^2 + y\sin x \quad \Rightarrow \quad F = \frac{x^3}{3} - y\cos x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\cos x + \varphi'(y) = y^3 - \cos x \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = y^3 \qquad \varphi(y) = \frac{y^4}{4}$$

$$F(x,y) \text{"="} \frac{x^3}{3} - y\cos x + \frac{y^4}{4}$$

דוגמא נוספת:

$$F = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \varphi'(y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = 0 \quad \Rightarrow \varphi(y) = const$$

ולכן

$$F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

4/5 ב אחת 13 נק' סה"כ 52

3/4 ב אחת 16 נק' סה"כ 48

סה"כ 100

חלק א' הראשונות חישוביות: גבולות. (עם לופיטל)

פונקציות קדומות (אינטגרלים מסויימים)

גזירה חלקית וכוונית.

חלק ב' חישוב אינטגרלים כפולים

מכסימום ומינימום של פונקציות של משתנה אחד ושני משתנים.

מסילות, משיקים למסילות, מישור משיק למשטח.

הצגה פרמטרית של מסילות, מישור וכו'.

אינטגרלים על מסילה, שדה וקטורי, שדה משמר, שדה משמר מקומית

דוגמאות: $F(x,y) = x\vec{i} + (x+y)\vec{j}$

ומסילה $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} \qquad 0 \le t \le 1$

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 (t+t^2)\cdot 2t\,dt = \frac{t^2}{2} + \frac{2}{3}t^3 + \frac{2t^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2} = 1\frac{2}{3}$$

נקח מסילה אחרת $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} \qquad 0 \le t \le 1$

$$\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r} = \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 2t\cdot 1\,dt = \frac{t^2}{2} + t^2\Big|_0^1 = 1\frac{1}{2}$$

אם נסתכל על $F = x\vec{i} + y\vec{j}$ זהו שדה משמר על המסילה $ti + t^2 j$

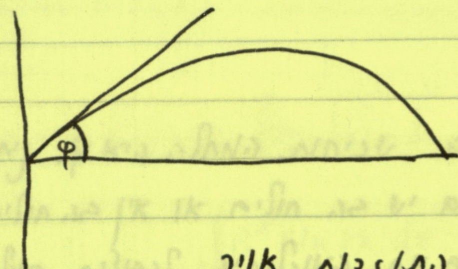
$$\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r} = \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 t^2\cdot 2t\,dt = \frac{t^2}{2} + 2\frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = 1$$

על המסילה $ti + tj$

$$\int \vec{F}\,d\vec{r} = \int_0^1 t\,dt + \int t\,dt = t^2\Big|_0^1 = 1 \qquad \varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

$$\int \frac{x-5}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{x-5}{(x-2)(x-3)} = \int \frac{1}{x-2} - 2\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \int \frac{dx}{x-2} + \dots$$

מרחק מכסימלי של ירי



באיזו זוית יש לירות כדור במהירות V_0

כדי שיגיע למרחק מכסימלי? מניחים שאין התנגדות אויר.

פתרון:

$$x(t) = V_0 t \cos\varphi \qquad y(t) = V_0 t \cdot \sin\varphi - \frac{g}{2}t^2$$

הכדור יגיע לגובה 0 (יפול על הקרקע) כאשר $V_0 \sin\varphi = \frac{g}{2} t$

כלומר

$$t = \frac{2V_0 \sin\varphi}{g}$$

המרחק שהוא יעבור יהיה $X = \frac{2V_0^2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{g} = \frac{V_0^2}{g}\sin 2\varphi$

המרחק המכסימאלי הוא איפוא $X' = 2\frac{V_0^2}{g}\cos 2\varphi = 0$

וכיון ש $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ נקבל $\varphi = \frac{\pi}{4}$

ולכן זהו אכן מכסימום. $X''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{2V_0^2}{g}\sin\frac{\pi}{2} = -\frac{2V_0^2}{g} < 0$

הזוית במקרה זה איננה תלויה ב V_0.

כשהירייה מבוצעת מגובה $h > 0$, יהיה משך המעוף שלו הפתרון של

$$V_0 t \sin\varphi + h - \frac{g}{2}t^2 = 0$$

כלומר

$$t = \frac{V_0 \sin\varphi + \sqrt{V_0^2 \sin^2\varphi + 2gh}}{g} = \frac{V_0}{g}\left(\sin\varphi + \sqrt{K + \sin^2\varphi}\right) \qquad K = \frac{2gh}{V_0^2}$$

$$X'(\varphi) = \frac{V_0^2}{g}\left[\cos 2\varphi - \frac{\sin\varphi}{\sqrt{K+\sin^2\varphi}}(K - \cos 2\varphi)\right]$$

והנקודה הסטציונארית מתקבל כאשר

$$\sqrt{K + \sin^2\varphi} = \sin\varphi\left(\frac{K}{\cos 2\varphi} - 1\right)$$

וע"י פתרון משוואה זו נקבל

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2+K}$$

ולכן $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2+K}}$ והמרחק המכסימאלי ישווה ל

$$S = \frac{V_0^2}{g}(1+K)^{1/2}$$

מספר בדיקות מינימאלי

יש לבדוק N מקרים כדי לגלות ביניהם חולים. שכיחות המחלה היא p. ניתן לבדוק קבוצה שלמה בבדיקה אחת כדי להחליט אם יש בה חולים או אין בה חולים.
הבדיקה של האוכלוסיה מתבצעת כדלקמן: מחלקים את האוכלוסיה לקבוצות בעלות k אנשים בקבוצה ומקבלים N/k קבוצות. בודקים כל קבוצה לחולים, אם אין בה אף חולה היא עוברת את הבדיקה, אם יש בה לפחות חולה אחד, בודקים כל אחד מחברי הקבוצה.
מהו הגודל k של הקבוצה שיבטיח מספר מינימאלי של בדיקות (בממוצע) ומהו מספר הבדיקות שנדרש במקרה זה?

פתרון:

ההסתברות שבקבוצה בת k אנשים לא ימצא חולה היא $(1-p)^k$. מספר הקבוצות (הממוצע) שבהן לא ימצא חולה הוא $\frac{N}{k}(1-p)^k$ וזה גם מספר הבדיקות שיש לבצע עבור קבוצות אלו. בשאר הקבוצות שמספרן $\frac{N}{k}(1-(1-p)^k)$ יהיה צורך לבצע k בדיקות בכל קבוצה. סך כל הבדיקות יהיה (בממוצע)

$$E(k) = \frac{N}{k}(1-p)^k + N(1-(1-p)^k)$$

נסמן $q=1-p$ ונעבור למשתנה רציף ונקבל

$$E(x) = N\left(\frac{1}{x}q^x + 1 - q^x\right) = N\left(1-\frac{x-1}{x}q^x\right)$$

ע"י השוואת הנגזרת לאפס נקבל:

$$x(x-1) = |\ln q|$$

כיון ש $p \ll 1$ ניתן לקרב את $x(x-1)$ ע"י x^2 ולקבל שגודל הקבוצה הוא בקירוב $1/\sqrt{p}$. (מתברר שגודל הקבוצה לא תלוי בגודל האוכלוסיה!)

היחס בין מספר הנבדקים לכלל האוכלוסיה יהיה $\qquad E/N = 1-\frac{x-1}{x}q^x$

ובקרוב טוב יחס זה שווה עבור $p \ll 1$:

$$E/N \approx 1-(1-\sqrt{p})e^{-\sqrt{p}} \approx \sqrt{p}(2-\sqrt{p})$$

p	$\sim k$	$\sim E/N$
0.05	4	0.383
0.01	10	0.186
0.001	32	0.062
0.0001	100	0.02

במחלה ששכיחותה $1/10{,}000$ יש לבצע רק 2% מן הבדיקות ביחס לבדיקת כלל האוכלוסיה.

III שאלות

I

חלק א'

ענה על 4 מתוך 5 השאלות הבאות:

1. חשב את הגבול $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x$

2. חשב את האינטגרל $\int e^x \sin 2x\,dx$

3. חשב את האינטגרל $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

4. נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2\sin\frac{x}{y}+y^2\cos\frac{x}{y}$

חשב את הביטוי $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$

5. נתון הוקטור $\vec{V}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ חשב את הנגזרת הכוונית של הפונקציה

$f(x,y,z)=x^4+y^4+2x^2-2y^2+z$ בכוון $\vec{V}$ בנקודות $(1,1,1)$ ו- $(1,2,3)$

<u>חלק ב'</u> (ענה על 3 מבין 4 השאלות הבאות)

6. חשב את האינטגרל הכפול $\int_0^1\int_y^1 x^2 e^{xy}\,dx\,dy$

7. נתונים n מספרים $a_1,a_2,\dots,a_n$ מהו הערך x שעבורו $\sum_{i=1}^{n}(a_i-x)^2$ מינימלי? האם זהו מינימום אבסולוטי?

9. נתון שדה $F(x,y,z)=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\vec{k}$ ומסילה $\vec{r}(t)=t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k}$ $0\le t\le 1$ חשב את $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$

8. מצא את נקודות המכסימום והמינימום הלוקאליים של

$f(x,y)=x^4+y^4-2x^2-2y^2+1.$

בהצלחה!

I שאלות

חלק א'

ענה על 4 מבין 5 השאלות הבאות:

(10) 1. חשב את הגבול $\lim_{x \to \pi/4} (\sin 2x)^{\tan^2 2x}$

(10) 2. חשב את האינטגרל $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}\,dx$

(10) 3. חשב את האינטגרל $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

(10) 4. נתונה הפונקציה $f(x,y) = x^{1/3} y^{-4/3} \sin\frac{x}{y}$

חשב את הביטוי

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$

(10) 5. נתון הוקטור $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

חשב את הנגזרת הכוונית של הפונקציה $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

בכוון $\vec{v}$ בנקודות $(2,2,3)$ ו- $(0,0,3)$.

חלק ב'

ענה על 3 מבין 4 השאלות הבאות:

(20) 6. חשב את האינטגרל $\iint_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$

בתחום D המוגבל ע"י המעגל $x^2+y^2=1$, ציר האיקס החיובי וציר הוויים החיובי.

(20) 7. מבין כל המלבנים בעלי שטח קבוע S מצא את זה שאורך האלכסון שלו מינימלי. מה אורך אלכסון זה?

(20) 8. מצא את נקודות המכסימום והמינימום המקומיים של $f(x,y) = x^4+y^4-2x^2+2y^2+1$.

(20) 9. נתונה הפונקציה $F(x,y) = x^3+y^3+xy$ והמסילה γ $\vec{r}(t) = \vec{i}\cdot\sin t + (1-\cos t)\,\vec{j}$

$0 \le t \le \pi$

חשב את האינטגרל $\int_\gamma \text{grad}\,F \cdot d\vec{r}$

בהצלחה!

I פתרון

1. מחשבים את הגבול של ln.
$$\lim_{x\to\pi/4} \tan^2 2x \cdot \ln\sin 2x = \lim_{x\to\pi/4} \frac{\ln\sin 2x}{\cos^2 2x} \overset{\text{הופיטל}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -\frac{1}{2\sin^2 2x}$$
$$= -\frac{1}{2}$$
ולכן הגבול הוא $\frac{1}{\sqrt{e}}$

2. $$\int \frac{2x-1}{x^3-3x+2}dx = \int \frac{2x-2+1}{(x-2)(x-1)}dx = 2\int\frac{dx}{x-2} + \int\frac{dx}{(x-1)(x-2)} = 2\int\frac{dx}{x-2} + \int\frac{dx}{x-2} - \int\frac{dx}{x-1} =$$
$$= 3\ln(x-2) - \ln(x-1) + C = \ln\frac{(x-2)^3}{(x-1)} + C$$

3. מציבים $t=\tan x$
$$\int\frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int\frac{dt}{2+t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan x\right) + C$$

4. הפונקציה הומוגנית מסדר 1- ולכן הפתרון הוא
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = -f = -x^{1/3}y^{-4/3}\sin\frac{x}{y}$$

5. וקטור היחידה בכוון $\vec{v}$ הוא $\vec{v}_1 = \frac{1}{3}(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})$
ולכן הנגזרת הכוונית $\nabla F\cdot\vec{v}_1 = \frac{1}{3}(2x+4y+4z)$
ובנקודות האמורות הערך הוא 8 , 1- , 4 .

6. נעבור לקואורדינטות קוטביות ואז:
$$\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1 re^{r^2}dr = \frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{r^2}}{2}\right]_0^1 =$$
$$= \frac{\pi}{4}(e-1)$$

7. $S=xy$, $L^2=x^2+y^2$, $0=(L^2)' = 2x-2\frac{S^2}{x^3}$
ולכן $x^4=S^2$ $\Leftarrow$ $x=\sqrt{S}$, $y=\sqrt{S}$ ואורך האלכסון הוא $L=\sqrt{2S}$

8. $\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3-4x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=4y^3+4y$ הנקודות החשודות $x=0,\pm 1$, $y=0$
$f_{xx}=12x^2-4$, $f_{yy}=12y^2+4$, $f_{xy}=0$

	(0,0)	(1,0)	(-1,0)
f_{xx}	-4	8	8
f_{yy}	4	4	4

לכן (1,0) ו (-1,0) מינימום מקומיות.

9. למעשה נתונה פונקצית הפוטנציאל לכן !
$$\int_\gamma \text{grad}F\cdot d\vec{r} = F(0,0) - F(0,2) = 0-8$$
אפשר לבצע את האינטגרל על כל מסילה, ~~[illegible]~~ ובפרט הקטע בין (0,2) ל (0,0) ולכן
$$\int_\gamma \text{grad}F\cdot d\vec{r} = -\int_0^2 3t^2\cdot 1\,dt = -t^3\Big|_0^2 = -8$$
על המסילה המקורית החשוב מסובך.

II שאלות

חלק א'

ענה על 4 מתוך 5 השאלות הבאות:

1. חשב את הגבול: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$

2. חשב את האינטגרל $\int \frac{x-4}{x^2-5x+6}\,dx$

3. חשב את האינטגרל $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

4. נתונה הפונקציה $f(x,y)=\frac{y^2}{x^2+y^2}\tan\frac{x}{y}$ חשב את הביטוי $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$

5. נתון הוקטור $\vec{V}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ חשב את הנגזרת המכוונת של $f(x,y,z)=x+y^2+z^3+xyz$ בנקודות: $(1,1,1)$ ו- $(1,1,0)$

חלק ב'

ענה על 3 מבין השאלות הבאות:

6. חשב את האינטגרל $\int_0^2\int_y^2 e^{\frac{x^2}{2}}\,dx\,dy$

7. תהי (x_0,y_0) נקודה ברביע הראשון, מצא את משוואת הישר העובר דרכה ויוצר עם ציר האיקס החיובי וציר הוי"ם החיובי משולש בעל שטח מינימלי, מהו שטח המשולש?

8. הראה של-פונקציה $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ יש מקסימום בעיגול $x^2+y^2\le 1$.

9. נתון שדה $\vec{F}=(x^2+y)\vec{i}+(x+y^2)\vec{j}$ ונתונה מסילה γ ע"י $\vec{r}(t)=t^2\vec{i}+((t+1)^3+1)\vec{j}$, $0\le t\le 1$ חשב את

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

בהצלחה!

פתרונות II

1. מחשבים את הגבול של $\ln f$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\tan^2 x}\ln\cos x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x} \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2\cos^2 x} = -\frac{1}{2}$$

ולכן הפתרון $1/\sqrt{e}$

2.

$$\int\frac{x-4}{x^2-5x+6} = \int\frac{x-4}{(x-2)(x-3)} = \int\frac{dx}{x-2} - \int\frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{dx}{x-3}$$
$$= \ln\frac{(x-2)^2}{(x-3)} + C$$

3.

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x - \cot x + C$$

4. f הומוגנית מסדר 0 ולכן

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y} = f = \frac{y^2}{x^2+y^2}\tan\frac{x}{y}$$

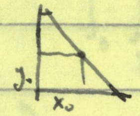
5. $f_x = 1+yz \quad f_y = 2y+xz \quad f_z = 3z^2+xy$ האורך של ∇ הוא 3 ולכן

$$D_{\vec v_1} = \frac{1}{3}\left(2(1+yz)+(2y+xz)+2(3z^2+xy)\right) = \frac{1}{3}(4+3+8) = 5$$
$$= \frac{1}{3}(2+2+2) = 2$$

6.

$$\int_0^2\int_y^2 e^{\frac{x^2}{2}}dx\,dy = \int_0^2 e^{x^2/2}dx\int_0^x dy = \int_0^2 x e^{\frac{x^2}{2}}dx = e^{x^2/2}\Big|_0^2 = e^2-1$$

7.



$$y = y_0+\alpha(x-x_0) \qquad x = x_0-\frac{y_0}{\alpha} \qquad y = y_0-\alpha x_0 \qquad S = \frac{1}{2}xy$$

$$S = \frac{1}{2}\left(x_0-\frac{y_0}{\alpha}\right)(y_0-\alpha x_0) \qquad 0 = S' = -x_0\left(x_0-\frac{y_0}{\alpha}\right)+\frac{y_0}{\alpha^2}(y_0-\alpha x_0) = \frac{y_0^2}{\alpha^2}-x_0^2$$

$$!\ \alpha = -\frac{y_0}{x_0} \qquad S'' = -3\frac{y_0^2}{\alpha^3} = 3\frac{x_0^2}{y_0} > 0$$ מינימום

$$S = \frac{1}{2}\,2x_0\cdot 2y_0 = 2x_0y_0$$

8. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ בראשית לכן הוא האקסטרמום היחיד. מראים שהוא מכסימום מקומי

ועל השפה $x^2+y^2=1$ $\quad f = \sqrt{3}$ לכן $(0,0)$ מכסימום בתחום!

9. גם כאן קיימת פונקציית פוטנציאל ולכן המסילה איננה חשובה (הפוטנציאל נתון ע"י $\frac{x^3+y^3}{3}+xy$. נקודות הקצה של המסילה הן $t=0 \Leftarrow (0,2)$ $\quad t=1 \quad (1,1)$

ולכן

$$\int\vec F\cdot d\vec r = F(1,1)-F(0,2) = 1\tfrac{2}{3}-\tfrac{8}{3} = -1$$

ושוב ניתן לחשב גם בצורה מפורשת.