Prof. Sergiu Hart
Feldman building, room 216
phone: 02-6584135/6
e-mail: hart@huji.ac.il
home page: http://www.ma.huji.ac.il/hart

Mathematical Economics

References

[1] K. J. Arrow & F. Hahn, *General Competitive Analysis*, Holden-Day, 1971.

[2] K. J. Arrow & M. D. Intriligator (editors), *Handbook of Mathematical Economics*, Volumes I-III, North-Holland, 1981, 1982, 1986.

[3] K. C. Border, *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*, Cambridge University Press, 1985.

[4] G. Debreu, *Theory of Value*, Wiley, 1959.

[5] G. Debreu, *Mathematical Economics: Twenty Papers of Gerard Debreu*, Cambridge University Press 1983.

[6] B. Ellickson, *Competitive Equilibrium: Theory and Applications*, Cambridge University Press, 1993.

[7] W. Hildenbrand & A. P. Kirman, *Introduction to Equilibrium Analysis*, North-Holland, 1976.

[8] E. Klein & A. C. Thompson, *Theory of Correspondences*, Wiley, 1984.

[9] A. Mas-Colell, *The Theory of General Economic Equilibrium: A Differentiable Approach*, Cambridge University Press, 1985.

פרופ' סי הרט

כלכלה מתמטית

1. לצייר את קופסת Edgeworth המתאימה ולמצוא את שווי-המשקל התחרותיים במקרים הבאים:

(א) $|T|=|L|=2$, $a^1=(1,1)$, $a^2=(0,1)$, $\forall t, u^t(x)=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$.

(ב) $|L|=2$, $|T|=3$, $a^1=(1,1)$, $a^2=(2,0)$, $a^3=(0,2)$,
$u^t(x)=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ $\forall t$.

(ג) $|L|=2$, $|T|=3$, $a^1=(2,4)$, $a^2=(0,1)$, $a^3=(3,2)$,
$u^t(x)=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ $\forall t$.

(ד) $|T|=|L|=2$, $a^t=(2,2)$ $\forall t$,
$u^2(x)=2x^1+x^2$, $u^1(x)=x^1+x^2$

(ה) $|T|=|L|=2$, $a^1=(1,2)$, $a^2=(2,2)$,
$u^2(x)=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$, $u^1(x)=\min\{x_1,x_2\}$

2. הוכח: פונק' תועלת רציפה $\Leftarrow$ $\{x \mid x \prec y\}$ פתוחה לכל y

3. האם הפונקציות הבאות חצי-רציפות מלמעלה?

(א) $F:\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x)=\begin{cases}\{3x\} & x<5\\ \{15+x\} & x\geq 5\end{cases}$$

(ב) $G:\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$

$$G(x)=\begin{cases}[x,\,x+2] & x<1\\ [1,\,9] & x=1\\ [x+1,\,5x+4] & x>1\end{cases}$$

פרופ' ס' הרט
[illegible] מתמטיקה

4. הוכח כי מכפלה קרטזית של קבוצות קמורות היא קבוצה קמורה.

5. הוכח כי מכפלה סופית של קבוצות קומפקטיות במרחבים אוקלידיים היא קומפקטית. מה לגבי מכפלה אינסופית?

6. תהיינה $F_k : X \Rightarrow Y_k$ פונקציות קבוצתיות, ונגדיר

$Y := \prod_{k=1}^{n} Y_k$, $F : X \Rightarrow Y$ ע"י $F(x) := \prod_{k=1}^{n} F_k(x)$.

הוכח: F_k חצי-רציפות מלעיל $\Leftarrow$ F חצי-רציפה מלעיל.

7. הוכח: F חצי-רציפה מלעיל $\Leftarrow$ $\overline{F}$ חצי-רציפה מלעיל, כאשר $\overline{F}(x) := \overline{F(x)}$ ($\bar{\ }$ מסמן "סגור")

8. הוכח: F חצי-רציפה מלעיל $\Leftarrow$ coF חצי-רציפה מלעיל, כאשר $(coF)(x) := co\ F(x)$ ("co" מסמן "קמור"). <u>הנחה</u>: הטווח של F הוא קבוצה קומפקטית במרחב אוקלידי.

9. האם הטענות ב-6,7,8 נכונות אם מחליפים "מלעיל" ב"מלרע"? הוכח או הפרך ע"י דוגמא נגדית.

פרופ' ס' הרט
לשה מתמטיק

10. [משפט המקסימום]. יהיו X, Y תתי-קבוצות של מרחבים אוקלידיים, Y קומפקטית. תהי $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נגדיר

$$g(x) := \max_{y \in Y} f(x,y) \qquad g: X \to \mathbb{R}$$

$$F(x) := \{y \in Y \mid f(x,y) = g(x)\} \qquad F: X \rightrightarrows Y$$
$$\left(=: \operatorname{argMax}_{y \in Y} f(x,y)\right)$$

הוכח: (א) g, F מוגדרות היטב, F פונק' קבוצתית.
(ב) g רציפה.
(ג) F חצי-רציפה מלעיל.
(ד) תן דוגמא בה F אינה רציפה.

11. [Caratheodory] תהי $A \subset \mathbb{R}^n$. הוכח: $x \in \mathrm{co}A \iff$ קיימות לכל היותר $n+1$ נקודות ב-A ש-x הוא קומבינציה קמורה שלהן.

12. תהיינה F, G פונקציות קבוצתיות, $F: X \rightrightarrows Y$, $G: Y \rightrightarrows Z$. הוכח:
(א) F, G חצי-רציפות מלמעלה $\Leftarrow$ $G \circ F$ חצי-רציפה מלמעלה.
(ב) F, G חצי-רציפות מלרע $\Leftarrow$ $G \circ F$ חצי-רציפה מלרע.
[האם יש צורך בהנחות מסוימות?]

פרופ' ס' הרט

טבלה מתמטית

13. (א) הוכח או הפרך ע"י דוגמא נגדית את הטענה: סכום פונקציות קבוצתיות חצי-רציפות מלמעלה הוא פונקציה חצי-רציפה מלמעלה.

(ב) כנ"ל עבור חצי-רציפות מלרע.

(ג) במידה והטענה לא נכונה, נסה למצוא תנאים נוספים שיבטיחו את נכונות הטענה.

14. (א) הוכח את <u>משפט המינימקס</u>: X, Y תת-קבוצות קמורות וקומפקטיות במרחבים אוקלידיים, $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ פונקציה דו-לינארית (כלו': לינארית בכל משתנה לחוד). אזי קיים

$$\min_{y \in Y} \operatorname{Max}_{x \in X} f(x,y) = \operatorname{Max}_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y)$$

(ב) האם תוכל להכליל לפונקציות f שאינן דו-לינאריות? מה הן דרישות מספיקות על f?

15. (א) הוכח משפט קיום נקודת שווי-משקל במשחק n-שחקנים: $X^1, \dots, X^n$ קבוצות קמורות וקומפקטיות במרחבים אוקלידיים; לכל $i=1,\dots,n$ $f^i: X^1 \times \dots \times X^n \to \mathbb{R}$ פונקציה לינארית בכל משתנה לחוד. אזי קיים $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ ב-$X^1 \times \dots \times X^n$ כך שלכל i ולכל y^i ב-X^i

$$f^i(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) \geq f^i(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^{i-1}, y^i, \bar{x}^{i+1}, \dots, \bar{x}^n).$$

(ב) האם ניתן להחליש את דרישת המולטי-לינאריות?

פרופ' ס' הרט
כלכלה מתמטית

16. הוכח את משפט ההפרדה: $C \subset \mathbb{R}^n$ קמורה, $a \notin \operatorname{int} C$
$\Leftarrow$ קיים $0 \neq p \in \mathbb{R}^n$ כך ש- $\forall x \in C$ $p \cdot a \leq p \cdot x$.

17. הוכח שעבור קבוצה קמורה מתקיים $\operatorname{int} C = \operatorname{int} \bar{C}$.

18. הוכח את משפט ההפרדה החזקה: $C \subset \mathbb{R}^n$ קמורה וסגורה,
$a \notin \operatorname{int} C$ $\Leftarrow$ קיים $0 \neq p \in \mathbb{R}^n$ כך ש- $p \cdot a < \inf_{x \in C} p \cdot x$.

19. (א) במודל ארו-דברה: נניח $\mathbb{E}_r$ הוא r-שיכפול של $\mathbb{E}$.
אזי לכל הקצאה x בליבה של $\mathbb{E}_r$ ולכל שני סוחרים
מאותו טיפוס t מתקיים
$$u^t(x^{t,k}) = u^t(x^{t,l}) \quad \forall k, l = 1, \dots, r \quad \forall t.$$
(ב) הבא דוגמה בה $x^{t,k} \neq x^{t,l}$.

20. מצא שווי-משקל תחרותיים והליבה עבור:
$|T| = |L| = 2$, $a^1 = (1, 0)$, $a^2 = (0, 1)$, $u^t(x) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$,
בשביל $\mathbb{E}_1$ ו- $\mathbb{E}_2$.

21. כנ"ל כאשר $a^2 = (1, 1)$ (במקום $(0, 1)$).

22. תהי $A \subset \mathbb{R}^n$. הקמור של A מוגדר כתור הקבוצה
הקמורה הקטנה ביותר (ביחס להכלה) המכילה את A;
הוא מסומן $\operatorname{co} A$. הוכח:
(א) $\operatorname{co} A$ מוגדר היטב.
(ב) $\operatorname{co} A = \bigcap \{ C \mid C \supset A,\ C \text{ קמורה} \}$
(ג) $\operatorname{co} A = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \mid m \in \mathbb{N},\ \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1,\ x_i \in A \right\}$

Separation Theorems

Sergiu Hart

October 31, 2005

1 Theorems

Theorem 1 *Let $C \subset \mathbb{R}^n$ be a convex closed set. Then $a \notin C$ if and only if there exists $p \in \mathbb{R}^n$ such that $p \cdot a < \inf p \cdot C$.*

Theorem 2 *Let $C \subset \mathbb{R}^n$ be a convex closed set. Then $a \notin \operatorname{int} C$ if and only if there exists $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$, such that $p \cdot a \leq \inf p \cdot C$.*

Theorem 3 *Let $C \subset \mathbb{R}^n$ be a convex set. Then $a \notin \operatorname{int} C$ if and only if there exists $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$, such that $p \cdot a \leq \inf p \cdot C$.*

Theorem 4 *Let C, $D \subset \mathbb{R}^n$ be convex sets. If $C \cap D = \emptyset$ then there exists $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$, such that $\sup p \cdot D \leq \inf p \cdot C$.*

Theorem 5 *Let C, $D \subset \mathbb{R}^n$ be convex closed sets, and at least one of them is bounded. Then $C \cap D = \emptyset$ if and only if then there exists $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$, such that $\sup p \cdot D < \inf p \cdot C$.*

Theorem 6 *Let $a_1, a_2, ..., a_m, b \in \mathbb{R}^n$. Then $b \in \operatorname{cone}\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ if and only if for every $x \in \mathbb{R}^n$, if all inequlities $a_i \cdot x \geq 0$ for $i = 1, 2, ..., m$ hold, then also $b \cdot x \geq 0$ holds.*